MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, geometrie

Clasa a XI-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

PROGRAMA ŞCOLARĂ PENTRU CLASA A XI-A MATEMATICĂ

aprobată prin Ordinul Ministrului Educaţiei şi Cercetării Nr. 3252/13.02.2006

TRUNCHI COMUN ŞI CURRICULUM DIFERENŢIAT - 4 ore

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. **Identificarea** unor situaţii practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic. 2. **Asocierea** unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces. 3. **Aplicarea** algoritmilor de calcul în situaţii practice. 4. **Rezolvarea** unor ecuaţii şi sisteme utilizând algoritmi specifici. 5. **Stabilirea** unor condiţii de existenţă şi/sau compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora. 6. **Optimizarea** rezolvării unor probleme sau situaţii-problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic).	**Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare** **Permutări** • Noţiunea de permutare, operaţii, proprietăţi. • Inversiuni, semnul unei permutări. **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulţimi de matrice. • Operaţii cu matrice: adunarea, înmulţirea, înmulţirea unei matrice cu scalar, proprietăţi. **Determinanţi** • Determinant de ordin *n*, proprietăţi. • Aplicaţii: ecuaţia unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi şi coliniaritatea a trei puncte în plan. **Sisteme de ecuaţii liniare** • Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{C})$, $n \leq 4$. • Ecuaţii matriceale. • Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute, sisteme de tip Cramer, rangul unei matrice. • Studiul compatibilităţii şi rezolvarea sistemelor: proprietatea Kroneker–Capelli, proprietatea Rouché, metoda Gauss.
1. **Caracterizarea** unor şiruri şi funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare. 2. **Interpretarea** unor proprietăţi ale şirurilor şi ale altor funcţii cu ajutorul reprezentărilor grafice. 3. **Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese. 4. **Exprimarea** cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii.	**Elemente de analiză matematică** **Limite de funcţii** • Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$. • Funcţii reale de variabilă reală: funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică, funcţii trigonometrice directe şi inverse. • Limita unui şir utilizând vecinătăţi, proprietăţi. • Şiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcţii cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, şiruri convergente: exemple semnificative: $(a^n)_n$, $(n^a)_n$, $((1+1/n)^n)_n$ (fără demonstraţie),

Competenţe specifice	Conţinuturi
5. **Studierea** unor funcţii din punct de vedere cantitativ şi calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietăţile algebrice şi de ordine ale mulţimii numerelor reale în studiul calitativ local, utilizarea reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi.	operaţii cu şiruri convergente, convergenţa şirurilor utilizând proprietatea Weierstrass. Numărul e; limita şirului $((1+u_n)^{1/u_n})_n$; $u_n \to 0$. • **Limite de funcţii: interpretarea grafică a limitei** unei funcţii într-un punct utilizând vecinătăţi, calculul limitelor laterale. • Calculul limitelor pentru funcţiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii: $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0. • Asimptotele graficului funcţiilor studiate: asimptote verticale, oblice.
Explorarea unor proprietăţi cu caracter local şi/sau global ale unor funcţii utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică.	**Continuitate** • Interpretarea grafică a continuităţii unei funcţii, studiul continuităţii în puncte de pe dreapta reală pentru funcţiile studiate, operaţii cu funcţii continue. • Semnul unei funcţii continue pe un interval de numere reale, proprietatea lui Darboux, studiul existenţei soluţiilor unor ecuaţii în $\mathbb{R}$. **Derivabilitate** • Tangenta la o curbă, derivata unei funcţii într-un punct, funcţii derivabile, operaţii cu funcţii care admit derivată, calculul derivatelor de ordin I şi al II-lea pentru funcţiile studiate. • Funcţii derivabile pe un interval: puncte de extrem ale unei funcţii, teorema lui Fermat, teorema Rolle, teorema Lagrange şi interpretarea lor geometrică, consecinţe ale teoremei lui Lagrange: derivata unei funcţii într-un punct. • Regulile lui ℓ'Hospital. • Rolul derivatei I în studiul funcţiilor: puncte de extrem, monotonia funcţiilor. • Rolul derivatei a II-a în studiul funcţiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune. **Reprezentarea grafică a funcţiilor** • Rezolvarea grafică a ecuaţiilor, utilizarea reprezentării grafice a funcţiilor în determinarea numărului de soluţii ale unei ecuaţii. • Reprezentarea grafică a funcţiilor. • Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă).

Competenţe specifice	Conţinuturi
	NOTE: • *În introducerea noţiunilor de limită a unui şir într-un punct şi de şir convergent nu se vor introduce definiţiile cu ε şi nici teorema de convergenţă cu ε.* • *Se utilizează exprimarea „proprietatea lui....”, „regula lui...”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*

Teste de evaluare inițială

Testul 1

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (35 puncte)

5p **1.** Partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ este egală cu:

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$. Valoarea $(f \circ f)(1)$ este egală cu:

A. 7 B. −1 C. 4 D. −2

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ este:

A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0\}$ D. Ecuația nu admite soluții.

5p **4.** Valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 6$, este:

A. 1 B. $\dfrac{-1}{4}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{4}$

5p **5.** Domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_3 \dfrac{2-x}{3-x}$, este mulțimea:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ B. $D = (3, +\infty)$ C. $D = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

D. $D = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

5p **6.** Mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt[3]{2x^2 - 7} \le 1$ este:

A. $[-2, 2]$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

5p **7.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 10^x + 1$. Imaginea funcției f este mulțimea:

A. $(-\infty, 1]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $[1, +\infty)$

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (55 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

10p a) Studiați monotonia funcției f pe $(0, +\infty)$.

10p b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentării grafice a funcției f cu dreapta de ecuație $y = -x + \frac{3}{2}$.

2. Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ și $C(4, 6)$.

5p a) Determinați ecuația dreptei AB.

5p b) Determinați ecuația înălțimii duse din A în triunghiul ABC.

5p c) Calculați aria triunghiului ABC.

20p **3.** Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 - 2)x - 3$, să fie strict descrescătoare.

Testul 2

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (35 puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$. Calculați $(f \circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\lg^2 x - 5\lg x + 6 = 0$.

5p **4.** Determinați valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 7x + 3$.

5p **5.** Precizați domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x-2}.$$

5p **6.** Scrieți mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt[3]{2 - x^2} \geq 1$.

5p **7.** Care este imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 1$?

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (55 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x + \log_{\frac{1}{2}} x$.

10p a) Studiați monotonia funcției f pe $(0, +\infty)$.

10p b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentării grafice a funcției f cu dreapta de ecuație $y = -2x + 2$.

2. Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$ și $C(3, 5)$.

5p a) Determinați ecuația dreptei AB.

5p b) Scrieți ecuația înălțimii duse din A în triunghiul ABC.

5p c) Calculați aria triunghiului ABC.

20p **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2m^2 - 1)x + 1$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția f să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Testul 3

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (35 puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3$. Calculați $(f \circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați ecuația $2\lg^2 x - 3\lg x + 1 = 0$.

5p **4.** Determinați valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 8x + 4$.

5p **5.** Precizați domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_3 \frac{x-2}{x-3}.$$

5p **6.** Scrieți mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt[3]{3-2x^2} \geq 1$.

5p **7.** Care este imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 1$?

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (55 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - 3x + \log_{\frac{1}{3}} x$.

10p a) Studiați monotonia funcției f pe $(0, +\infty)$.

10p b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentării grafice a funcției f cu dreapta de ecuație $y = -3x + 3$.

2. Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(3, -1)$ și $C(5, 7)$.

5p a) Determinați ecuația dreptei AB.

5p b) Scrieți ecuația înălțimii duse din A în triunghiul ABC.

5p c) Calculați aria triunghiului ABC.

20p **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 3)x - 2$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Testul 4

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (35 puncte)

5p **1.** Ordonați crescător numerele: $a = \log_5 \frac{1}{5}$, $b = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, $c = 5^{-2}$.

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$. Valoarea $f(f(1))$ este egală cu:

A. 9 B. 19 C. 1 D. –2

5p **3.** Soluția ecuației $5^{x+2} + 5^x = 26$ este:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. –1

5p **4.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{2}\,x + 1$:

A. este crescătoare B. este constantă

C. nu este monotonă D. este strict descrescătoare

5p **5.** Domeniul maxim de definiție al funcției

$$f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_3\left(x^2 - x + 1\right),$$

este mulțimea:

A. $D = \mathbb{R}$ B. $D = (0, 1)$ C. $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $D = (-1, 1)$

5p **6.** Numărul soluțiilor reale ale ecuației $3 - \sqrt{x+3} = x$ este egal cu:

A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

5p **7.** Imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$, este:

A. $[1, +\infty)$ B. $\mathbb{R}$ C. $\left[-\frac{29}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{29}{4}\right)$

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (55 puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5^x + 2x + 3$.

10p a) Studiați monotonia funcției f pe $\mathbb{R}$.

10p b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentării grafice a funcției f cu dreapta de ecuație $y = 2x + 4$.

2. Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ și $C(3, 2)$.

5p a) Determinați ecuația dreptei BC.

5p b) Determinați ecuația mediatoarei segmentului BC.

5p c) Calculați aria triunghiului ABC.

20p **3.** Se consideră funcția $f : [2, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

b) Determinați inversa funcției f.

ALGEBRĂ

Capitolul I. Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare

1. Permutări

1.1. Noţiunea de permutare, operaţii, proprietăţi

Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. O funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$ se numeşte ***permutare*** (substituţie) de gradul n. Se notează mulţimea tuturor permutărilor de gradul n cu S_n sau σ_n, iar elementele din S_n le vom nota cu litere mici greceşti: α, β, γ, …, φ, ψ, θ, σ, τ.

O permutare σ de gradul n se reprezintă printr-un tablou de forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Numărul tuturor permutărilor de gradul n, adică numărul tuturor funcţiilor bijective ale unei mulţimi cu n elemente în ea însăşi, este egal cu $n!$.

Permutarea identică se notează cu e şi avem:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

1.2. Produsul (compunerea) permutărilor

Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, iar σ şi φ, două permutări de gradul n, adică $\sigma \in S_n$, $\varphi \in S_n$. Permutarea $\sigma \circ \varphi$, definită prin $(\sigma \circ \varphi)(a) = \sigma(\varphi(a))$, $\forall\, a \in A$, se numeşte ***produsul*** (sau compunerea) permutărilor σ şi φ.

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ şi $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$,

atunci $\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(\varphi(1)) & \sigma(\varphi(2)) & \sigma(\varphi(3)) & \ldots & \sigma(\varphi(n)) \end{pmatrix}$.

Observaţie. Se mai scrie $\sigma \circ \varphi = \sigma\varphi$; operaţia de compunere a permutărilor se mai numeşte ***înmulţirea*** permutărilor.

Exemplu. Să considerăm permutările de gradul 3, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Produsul $\sigma\varphi$ este permutarea $\sigma\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

iar $\varphi\sigma$ este permutarea $\varphi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Observăm că $\sigma\varphi \neq \varphi\sigma$.

Proprietăţile înmulţirii permutărilor

1. Înmulţirea permutărilor este asociativă, adică $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n$, avem $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

2. Elementul neutru. Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ are proprietatea că

$e\sigma = \sigma e = \sigma, \ \forall \ \sigma \in S_n$.

3. Orice permutare are o inversă, adică $\forall \ \sigma \in S_n$, $\exists \ \sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât

$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

4. Înmulţirea permutărilor nu este, în general, comutativă.

1.3. Transpoziţii

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ şi $i, j \in A$, $i \neq j$. Se numeşte ***transpoziţie***, şi se notează τ_{ij} sau (ij), permutarea $\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale transpoziţiei

1. $(ij) = (ji)$;
2. $(ij)^{-1} = (ij)$;
3. $(ij)^2 = e$.

Numărul tuturor transpoziţiilor de gradul n este egal cu C_n^2.

1.4. Inversiunile unei permutări. Semnul (signatura) unei permutări

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ şi M, submulţimea produsului cartezian $A \times A$, definită prin: $M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, atunci o pereche ordonată $(i, j) \in M$ se numeşte ***inversiune*** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Vom nota cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ. Avem: $0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2$.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numeşte ***semnul*** (sau signatura) permutării σ.

Permutarea σ se numeşte ***pară*** dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, adică pentru $m(\sigma)$ par.

Permutarea σ se numeşte ***impară*** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, adică pentru $m(\sigma)$ impar.

Exemplu. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Numărul de inversiuni al permutării σ este $m(\sigma) = 1 + 1 = 2$.

Semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = +1$, adică σ este permutare pară.

Propoziţie. Orice transpoziţie este impară.

Dacă $\tau_{ij} = (ij)$, $i < j$, atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$.

Propoziţie. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, atunci semnul permutării σ este dat de formula:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Propoziţie. Dacă σ şi φ sunt permutări de gradul n, atunci $\varepsilon(\sigma\varphi) = \varepsilon(\sigma)\, \varepsilon(\varphi)$.

Propoziţie. Orice permutare de gradul n, $(n \ge 2)$, este un produs de transpoziţii.

Exemplu. Considerăm permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi o scriem ca produs de transpoziţii.

Avem $\sigma(1) = 3$; considerăm transpoziţia τ_{13} şi facem produsul

$$\sigma_1 = \tau_{13} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{24}.$$

Din $\tau_{24} = \tau_{13} \cdot \sigma$ rezultă $\sigma = \tau_{13}\tau_{24}$.

Consecinţe

1. Permutarea $\sigma\varphi$ este pară dacă permutările σ şi φ au acelaşi semn.

2. Permutarea $\sigma\varphi$ este impară dacă permutările σ şi φ au semne contrare.

3. Orice permutare pară este un produs al unui număr par de transpoziţii.

4. Orice permutare impară este un produs al unui număr impar de transpoziţii.

Vom nota cu A_n mulţimea permutărilor pare de gradul n.

5. Dacă σ şi φ sunt permutări pare de gradul n, adică $\sigma \in A_n$, $\varphi \in A_n$, atunci $\sigma\varphi \in A_n$ şi $\sigma^{-1} \in A_n$. În plus, $e \in A_n$.

6. Numărul permutărilor pare de gradul n este $\frac{n!}{2}$, adică A_n are $\frac{n!}{2}$ elemente.

Exerciţii propuse

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi $\sigma\varphi$ şi $\varphi\sigma$.

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze permutările: $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$ şi să se determine cel mai mic număr natural nenul k, pentru care $\sigma^k = e$.

3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există un număr natural nenul p, astfel încât $\sigma^p = e$.

4. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că $\sigma\tau = \tau\sigma$.

5. Să se scrie numărul de inversiuni şi semnul fiecăreia dintre permutările:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Să se scrie toate transpoziţiile de gradul 3.

7. Să se scrie toate transpoziţiile de gradul 4.

8. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziţii.

9. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & \ldots & 2n \end{pmatrix}$.

Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.

Să se determine n, astfel încât σ să fie permutare pară.

10. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.

Să se determine n, astfel încât σ să fie permutare pară.

11. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziţii de forma $(1\ 2)$; $(1\ 3)$; …; $(1\ n)$.

1.5. Evaluare sumativă

Testul I

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

2. Să se determine permutarea $\sigma \in S_6$ care are numărul maxim de inversiuni.

3. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 4 & 3 & 7 & j & 6 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j, astfel încât σ să fie: a) pară; b) impară.

4. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziţii.

Testul II

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze puterile: σ^1, σ^2, σ^3, ….

b) Să se determine cel mai mic număr natural $k > 0$, pentru care $\sigma^k = e$.

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) numărul de inversiuni ale permutării σ^{-1};

b) signatura permutării σ^{-1}.

3. Să se scrie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziţii de forma $(1\ k)$, unde $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

4. Fie permutarea $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Permutarea σ este pară sau impară?

Probleme pregătitoare pentru bacalaureat

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea S_n a permutărilor de n elemente şi permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

a) Pentru $n = 4$ şi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, să se calculeze σ^4.

b) Să se demonstreze că, pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$.

c) Să se arate că, pentru $n \geq 3$, există $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, astfel încât $\sigma^n = \sigma$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 6)

2. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\alpha^{2008} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

b) Să se calculeze $\sum_{\sigma \in S_3} m(\sigma)$, unde $m(\sigma)$ este numărul inversiunilor permutării $\sigma \in S_3$.

c) Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este diferit de permutarea identică $e \in S_3$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 10)

3. În mulţimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se verifice că permutarea σ este pară.

b) Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

c) Pentru $k \in \mathbb{N}$ fixat, să se determine toate permutările $y \in S_3$, astfel încât $y^k = \sigma$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 25)

4. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine σ^{-1}.

b) Să se arate că permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

c) Să se arate că ecuaţia $x^4 = \sigma$ nu are soluţii în S_6.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 52)

5. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

a) Să se determine mulţimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

b) Să se arate că toate elementele mulţimii A sunt permutări pare.

c) Să se găsească permutarea $\tau \in S_5$, astfel încât suma $\alpha = \sum_{k=1}^{5} \sigma(k)\tau(k)$ să ia valoarea maximă.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 80)

Test de autoevaluare

I. Completaţi spațiile punctate astfel încât să obțineţi propoziții adevărate. (30 puncte)

10p **1.** Produsul permutărilor $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este permutarea .....

10p **2.** Cel mai mic număr natural nenul k, pentru care $\sigma^k = e$, unde

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, este ....

10p **3.** Numărul de inversiuni al permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este ....

II. Încercuiţi răspunsul corect. (30 puncte)

10p **1.** Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci σ^2 este:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10p **2.** Inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ este:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

10p **3.** Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soluția ecuației $\sigma \cdot x = \tau$ este:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

III. Scrieţi rezolvările complete. (30 puncte)

10p **1.** Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 4 & 3 & 7 & j & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Determinați i și j, astfel încât permutarea σ să fie:

a) pară;

b) impară.

10p **2.** Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 12 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 24 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$. Determinați numărul natural n, astfel încât permutarea σ să fie impară.

10p **3.** Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Scrieți permutarea σ ca produs de transpoziții.

2. Matrice

Fie $\mathbb{C}$, mulţimea numerelor complexe, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, mulţimea primelor m numere naturale nenule, şi $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, mulţimea primelor n numere naturale nenule.

Vom numi ***matrice*** de tipul (m, n) o funcţie $A : M \times N \to \mathbb{C}$.

Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{C},\ i \in M,\ j \in N$, vom scrie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sub forma unui tablou cu m linii şi n coloane ce cuprinde valorile funcţiei A.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mulţimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având elemente din mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe.

Dacă $m = n$, se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n. În acest caz, sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ se numeşte ***diagonala principală*** a matricei pătratice A, iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2;n-1}, \ldots, a_{n1})$ se numeşte ***diagonala secundară*** a matricei pătratice A.

Suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătrate A se numeşte ***urma*** matricei A şi se notează Tr(A), adică $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Proprietăţi ale urmei matricei

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Au loc egalităţile:

a) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$;

b) $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A)$;

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2.1. Operaţii cu matrice

1) Adunarea matricelor

Fie A şi B, două matrice de acelaşi tip, $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, unde $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Definim matricea $C = (c_{ij})$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ n}$, ca fiind suma dintre matricele A şi B; scriem $C = A + B$.

Exemplu. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Avem $A + B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & i+0 & -1+1 \\ 0+3 & -1+2 & 2+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Proprietăţile adunării matricelor

1°) Adunarea matricelor este ***comutativă***, adică oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $A + B = B + A$.

2°) Adunarea matricelor este ***asociativă***, adică oricare ar fi $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3°) Element ***neutru***. Matricea $0_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, cu toate elementele egale cu zero, este element neutru pentru adunarea matricelor, adică oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$.

4°) Orice matrice are un ***opus***, adică oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, există matricea notată $-A$, astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$.

Matricea $-A = (-a_{ij})$, dacă $A = (a_{ij})$.

2) Înmulţirea matricelor

Fie $A = (a_{ij})$, o matrice de tipul (m, n), şi $B = (b_{jk})$, o matrice de tipul (n, p).

Definim matricea $C = (c_{ik})$, de tipul (m, p), unde

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Matricea C se numeşte ***produsul*** dintre matricele A şi B şi se notează $C = AB$.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece A este o matrice de tipul (2, 3) şi B – o matrice de tipul (3, 2), are sens produsul AB şi obţinem: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot(-3) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-4)\cdot(-1) & 0\cdot(-3) + 3\cdot 1 + (-4)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proprietăţile înmulţirii matricelor

1°) Înmulţirea matricelor este ***asociativă***: $(AB)\,C = A\,(BC)$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

2°) Înmulţirea matricelor este ***distributivă*** faţă de adunare:
la stânga: $A(B + C) = AB + AC$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
la dreapta: $(A + B)\,C = AC + BC$, unde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

3°) În mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există un element ***neutru*** faţă de înmulţire. Matricea pătratică de ordinul n, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, care are pe diagonala principală elementele 1, iar restul elementelor sunt 0, are proprietatea că, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Observaţie. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, are sens să facem produsul AB şi produsul BA. În general, $AB \neq BA$.

Exemplu. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}. \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ridicarea la putere a unei matrice pătratice este o înmulţire repetată

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori A}}, \text{ unde } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Să determinăm A^n, $n \geq 1$. Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin inducţie matematică se arată că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.

3) Înmulţirea cu scalari a matricelor

Fie $A = (a_{ij})$, o matrice de tipul (m, n), şi λ, un număr complex. Definim matricea $B = (b_{ij})$ de tipul (m, n) prin $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Matricea B se numeşte ***produsul*** dintre numărul complex λ (sau scalarul λ) şi matricea A. Se notează $B = \lambda \cdot A$.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & i \end{pmatrix}$, de tipul (2, 3), şi scalarul $\lambda = 2$.

Avem $\lambda \cdot A = \lambda A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & 8 & 2i \end{pmatrix}$.

Proprietăţile înmulţirii cu scalari a matricelor

1°) $1 \cdot A = A$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2°) $(a + b)A = aA + bA$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$.

3°) $(ab)A = a(bA)$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$.

4°) $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$, unde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

5°) $\lambda (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Transpusa unei matrice

Fie $A = (a_{ij})$, o matrice de tipul (m, n).

Matricea $A^t = (a_{ij}{}^t)$ de tipul (n, m) se obţine din matricea A, trecând liniile în coloane şi coloanele în linii.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -i \end{pmatrix}$, de tipul (2, 3).

Matricea transpusă este de tipul (3, 2) şi $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \\ 3 & -i \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale transpusei unei matrice

1°) $(A + B)^t = A^t + B^t$, unde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2°) $(AB)^t = B^t A^t$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

3°) $(\lambda A)^t = \lambda \cdot A^t$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

4°) $\left(A^t\right)^t = A$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Rezultate importante

1. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $AB = BA$, atunci are loc egalitatea:

$$A^k - B^k = (A-B)\left(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}\right).$$

2. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $AB = BA$, atunci are loc formula binomului lui Newton:

$$(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + \ldots + B^k.$$

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci A verifică ecuaţia:

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc)I_2 = O_2.$$ (**Teorema Hamilton-Cayley**)

4. Dacă $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, atunci $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţii propuse

1. Fie $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A + B$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $A + B$, $A - B$; b) $A \cdot B$, $B \cdot A$;
c) A^2, B^2; d) $A^2 - B^2$; $AB - BA$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $A + B$, $A - B$; b) AB, BA; c) A^2, B^2; d) $A^2 - B^2$; $AB - BA$.

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $AX = XA$.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Dacă $f(x) = x^2 - 3x + 2I_3$, să se calculeze $f(A)$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Dacă $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AB - BA$ este nulă. Să se deducă de aici că egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă. (Acomodaţi-vă cu problema în cazurile particulare $n = 2$, $n = 3$).

8. Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât:

a) $A^2 = I_2$; b) $A^2 = -I_2$; c) $A^2 = O_2$.

9. Să se determine a, b, c, x, y, z, ştiind că are loc egalitatea matriceală:

$$2\begin{pmatrix} a & -2b & 3c \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ x & y & -3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 \\ -9 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

10. Să se determine matricea X din ecuaţia:

$$3X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine x şi y din egalitatea matriceală:

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x & 6 & 5y & 1 \\ 18 & -2x & 5 & -1 \\ -1 & -4y & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

12. Să se calculeze suma matriceală: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & -k & k^3 & -k^3 \\ -1 & 2 & -3 & k(k+1) \end{pmatrix}.$

13. Dacă ε este o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze suma matriceală:

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k \end{pmatrix}.$$

14. Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} 2\cos^2 x & \cos 2x \\ \operatorname{ctg} x & \sin^2 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Să se rezolve ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, unde X este o matrice pătratică de ordinul doi, cu coeficienţi reali.

16. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n = a^n\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$, unde $u = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ şi $v = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

17. Fie A, o matrice pătratică de ordinul doi. Dacă $A^2 = O_2$, arătaţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A este egală cu zero.

18. Să se arate că există o infinitate de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care verifică egalitatea $A^2 = I_2$.

19. Să se arate că există o infinitate de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care verifică egalitatea $A^2 = -I_2$.

20. Să se arate că există o infinitate de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care verifică egalitatea $A^2 = O_2$.

21. Fie $\mathcal{M}$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi, de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Definim funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$, $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Să se arate că:

a) f este bijectivă;

b) oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, au loc egalităţile:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2); \qquad f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

22. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $0 \le a^2 + b^2 < 1$.

a) Să se arate că matricea A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că şirurile (a_n), (b_n) sunt convergente şi au limita zero.

23. Să se calculeze suma matriceală: $\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \sin kx & \cos kx \\ \sin^2 kx & \cos^2 kx \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

24. Să se arate că $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2^{12} \cdot I_2$.

25. Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a_{n+1}=1+a_n$ şi $b_{n+1}=a_n+b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

28. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

29. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

30. Rezolvaţi ecuaţia matriceală: $X^3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

2.2. Evaluare sumativă

Testul III

1. Se consideră matricea $A_k=\begin{pmatrix}2k & 6k^2 & 1\\ 2k-1 & -1 & 4k-3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$. Să se calculeze suma $S_n=A_1+A_2+...+A_n$.

2. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ştiind că $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X = X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Se consideră mulţimea de matrice $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| \, x>0\right\}$.

a) Arătaţi că $A(x)\cdot A(y) \in G,\ \forall\, x, y \in (0, \infty)$.

b) Calculaţi $A^n(x)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A(x) \in G$.

Testul IV

1. Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2k-1 & 2k+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Să se calculeze suma: $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

2. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Se consideră mulţimea de matrice $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) \in G, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^*$.

b) Calculaţi $A^n(x)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A(x) \in G$.

Probleme pregătitoare pentru bacalaureat

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \neq 0$.

a) Să se arate că, dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX = XA$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ şi $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

c) Să se rezolve în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 1)

2. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}$ a matricelor cu 3 linii şi 3 coloane, cu elemente din $\{-1, 1\}$, şi matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se dea un exemplu de matrice inversabilă din mulţimea $\mathcal{M}$.

b) Să se demonstreze că, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2^n \cdot I_3 + \dfrac{(-1)^n - 2^n}{3} \cdot B$.

c) Să se determine suma tuturor matricelor din mulţimea $\mathcal{M}$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 8)

3. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}$ a matricelor cu 3 linii şi 3 coloane, cu elemente din $\{-1, 1\}$.

a) Să se dea un exemplu de matrice de rang 2 din mulţimea $\mathcal{M}$.

b) Să se demonstreze că, oricum am alege două matrice din mulţimea $\mathcal{M}$, produsul acestora este diferit de matricea nulă.

c) Să se determine numărul tuturor matricelor din mulţimea $\mathcal{M}$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 15)

4. Se consideră mulţimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}$.

a) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

b) Să se găsească două matrice $C, D \in G$, astfel încât $CD \neq DC$.

c) Să se arate că, dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 - ... + A^{2008} \in G$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 16)

5. Se consideră matricele A, B, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$ şi $AX = XA$.

a) Să se verifice că $B^2 - 2B + I_3 = O_3$.

b) Să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $X^2 - 2aX + a^2 I_3 = O_3$.

c) Să se demonstreze că nu există $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $C^2 - 2C + 2I_3 = O_3$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 22)

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Să se arate că, $\forall\ X \in C(A)$, $XA = AX$.

b) Să se arate că, dacă $Y \in C(A)$ şi $Y^2 = 0_2$, atunci $Y = O_2$.

c) Să se arate că, dacă $Z \in C(A)$ şi $Z^{2008} = 0_2$, atunci $Z = O_2$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 23)

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, cu $t \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX = XA$, atunci există a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

c) Să se determine numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuaţia $X^2 = A$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 26)

8. Pentru $x \in \mathbb{C}$, se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Să se verifice că $A^2(x) = 2xA(x)$.

b) Să se determine numerele complexe x, pentru care $A^4(x) + A^2(x) = O_2$.

c) Să se demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci ecuaţia $X^n = A(0)$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nu are soluţii.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 31)

9. Fie şirul $(F_n)_{n\geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = A + I_2$.

b) Să se arate că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ şi $AX = XA$, atunci X este inversabilă.

c) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall\ n \geq 1$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 51)

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice relaţia $A^3 = A^2 + A - I_3$.

b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n + 3$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 69)

11. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $M = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + a \cdot A,\ a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) \in M$, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $X(a) \cdot X(e) = X(e)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze produsul $X(2) \cdot X(3) \cdot \ldots \cdot X(2008)$.

(Bacalaureat 2008, M_1, varianta 94)

12. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.

c) Ştiind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $X = mI_2 + nA$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 26)

13. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $AB - 2B = O_2$.

c) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AXB = O_2$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 27)

14. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că, dacă $A, B \in M$, atunci $AB \in M$.

c) Să se demonstreze că, dacă $X \in M$ şi $AX = XA$, pentru orice $A \in M$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 33)

15. Se consideră mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $B^2 = 3B$.

b) Să se arate că $mI_3 + nB \in G$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $A^2 = O_3$, atunci $A = O_3$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 36)

16. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice $G = \left\{ X = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| X^2 = -I_2 \right\}$.

a) Să se verifice că $A \in G$.

b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X + I_2) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot X$, $\forall X \in G$.

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, pentru care avem $AX = XA$, este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 86)

17. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A \cdot B$.

b) Să se calculeze $A^2 + A^3$.

c) Să se demonstreze că, dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $AX = XA$, atunci există numerele reale a, b, c, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 88)

18. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C = A + B$.

a) Să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că $A^2 = 6A$ şi $B^2 = -6B$.

c) Să se demonstreze că $C^3 = 6(A + B)^2$.

(Bacalaureat 2008, M_2, varianta 95)

Test de autoevaluare

I. Completaţi spațiile punctate astfel încât să obţineţi propoziții adevărate. (30 puncte)

10p **1.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci A^n, $n \geq 1$, este ....

10p **2.** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $(A + B)^t =$ ....

10p **3.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci A verifică ecuația

$$X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \cdot I_2 = \text{...............}$$

II. Încercuiţi răspunsul corect. (30 puncte)

10p **1.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci AB este:

A. O_3 B. I_3 C. A^2 D. B^2

10p **2.** Valoarea lui $x \in (0, \pi)$, pentru care are loc egalitatea matriceală

$$\begin{pmatrix} \cos 2x & 2\cos^2 x \\ \sin^2 2x & \operatorname{ctg} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ este:}$$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

10p **3.** Fie $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Atunci A^{12} este:

A. $2^4 \cdot I_2$ B. $2^8 \cdot I_2$ C. $2^{10} \cdot I_2$ D. $2^{12} \cdot I_2$

III. Scrieţi rezolvările complete. (30 puncte)

10p **1.** Dacă ε este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, calculați

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k \end{pmatrix}.$$

10p **2.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

10p **3.** Rezolvați ecuația matriceală $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Determinanţi

Fie matricea pătratică de ordinul n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se numeşte ***determinantul*** matricei A numărul $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, unde S_n este mulţimea tuturor permutărilor de gradul n şi $\varepsilon(\sigma)$ este semnul permutării σ.

Se notează $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Cazuri particulare

Pentru $n = 2$, avem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Pentru $n = 3$, avem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$.

Exemple. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 = 0$.

3.1. Proprietăţi ale determinanţilor

1°) Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse.
Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A) = \det(A^t)$.

2°) Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

3°) Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele, obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

4°) Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

5°) Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un număr λ, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu λ înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.

6°) Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale, atunci determinantul matricei este nul.

7°) Dacă o linie (sau o coloană) a unei matrice este o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei este nul.

8°) Dacă la o linie (sau coloană) a unei matrice adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci această matrice are determinantul egal cu cel al matricei iniţiale.

3.2. Calculul determinanţilor de ordinul *n*

Fie un determinant de ordinul n, $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinantul de ordinul $n - 1$ care se obţine din determinantul d, suprimând linia i şi coloana j, se numeşte ***minorul*** elementului a_{ij} şi se notează cu d_{ij}.

Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ se numeşte ***complementul algebric*** al elementului a_{ij} în determinantul d.

Determinantul d, de ordinul n, se poate descompune în n determinanţi de ordinul $n - 1$ după linia i şi are loc egalitatea:

$$d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \dots + a_{in}\delta_{in};$$

sau după coloana j şi avem:

$$d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \dots + a_{nj}\delta_{nj}.$$

Exemplu. Fie determinantul de ordinul 4: $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Să dezvoltăm determinantul d după linia întâi.

Avem $d = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0.$

Observaţie. Deoarece în determinantul iniţial d avem $L_3 = L_2 + L_4$, rezultă că $d = 0$, fără a mai face dezvoltarea după o linie sau coloană (sau $L_3 = 2L_1$).

Observaţie. Dezvoltarea după o linie sau după o coloană mai poartă denumirea de **regula lui Laplace**.

Rezultate importante

- Numim determinant **Vandermonde** (de ordinul n) determinantul

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

  Are loc egalitatea: $V = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

- **Relaţia lui Hamilton−Cayley:**

  Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are loc egalitatea: $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$.

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, unde $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.3. Aplicaţii: ecuaţia unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi şi coliniaritatea a trei puncte

- Fie punctele diferite $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Ecuaţia carteziană a dreptei determinată de cele două puncte (sub formă de determinant) este:

$$M_1M_2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplu. Dacă $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 1)$, atunci $M_1M_2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

- Fie punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este dată de formula:

$$\mathcal{A}_{[M_1M_2M_3]} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exemplu. $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(3, 3) \Rightarrow \mathcal{A}_{[M_1M_2M_3]} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \text{ adică } \mathscr{A}_{[M_1M_2M_3]} = \frac{3}{2}.$$

- Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplu. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(3, \alpha)$ să fie coliniare.

Soluţie. Din $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$ obţinem $\alpha = 0$.

Exerciţii propuse

1. Să se calculeze determinanţii de ordinul doi:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \sqrt{2}+1 & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & \sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} e & \pi \\ \pi & e \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \ln 10 & \lg e \\ \lg(10e) & \ln(10e) \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

2. Să se calculeze determinanţii de ordinul trei:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$;

g) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} a^2 & nab & b^2 \\ b^2 & a^2 & nab \\ nab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ C_{n+2}^0 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} A_n^0 & A_n^1 & A_n^2 \\ A_{n+1}^0 & A_{n+1}^1 & A_{n+1}^2 \\ A_{n+2}^0 & A_{n+2}^1 & A_{n+2}^2 \end{vmatrix}$.

3. Să se calculeze determinanţii de ordinul patru:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 & n+3 \\ n+1 & n+2 & n+3 & n \\ n+2 & n+3 & n & n+1 \\ n+3 & n & n+1 & n+2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} n & n & n & n \\ n & n+1 & n+2 & n+3 \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ n+2 & n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} n+2 & n+1 & n & n \\ n+1 & n+2 & n+1 & n \\ n & n+1 & n+2 & n+1 \\ n & n & n+1 & n+2 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 0 & n & n+1 & n+2 \\ -n & 0 & n+2 & n+3 \\ -n-1 & -n-2 & 0 & n+4 \\ -n-2 & -n-3 & -n-4 & 0 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$.

4. Să se verifice egalităţile:

a) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$; b) $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$.

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
Adresa: IAȘI , Bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, nr. 2 -
700124 Telefon: 0763 082 213
E-mail: comenzi@ecredu.ro
Tipărit în România