MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, geometrie

Clasa a X-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL
Iași - 2019

CUPRINS

GEOMETRIE

PROGRAMA ŞCOLARĂ PENTRU CLASA A X-A MATEMATICĂ

aprobată prin Ordinul Ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 4598/31.08.2004

TRUNCHI COMUN ŞI CURRICULUM DIFERENŢIAT - 4 ore

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. **Identificarea** caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi formei de scriere a unui număr real sau complex în contexte specifice. 2. **Determinarea** echivalenţei între forme diferite de scriere a unui număr, compararea şi ordonarea numerelor reale. 3. **Aplicarea** unor algoritmi specifici calculului cu numere reale sau complexe pentru optimizarea unor calcule şi rezolvarea de ecuaţii. 4. **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real sau complex în funcţie de contexte, în vederea optimizării calculelor. 5. **Alegerea** strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor. 6. **Determinarea** unor analogii între proprietăţile operaţiilor cu numere reale sau complexe scrise în forme variate şi utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuaţii.	**Mulţimi de numere** • **Numere reale**: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, iraţional şi real ale unui număr pozitiv, aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale. • Radical dintr-un număr raţional, $n \geq 2$, proprietăţi ale radicalilor. • Noţiunea de logaritm, proprietăţi ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operaţia de logaritmare. • **Mulţimea** $\mathbb{C}$. Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex operaţii cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operaţiilor de adunare şi scădere a numerelor complexe şi a înmulţirii acestora cu un număr real. • Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali. Ecuaţii bipătrate. • Numere complexe sub forma trigonometrică (coordonate polare în plan), înmulţirea numerelor complexe şi interpretare geometrică, ridicarea la putere (formula lui Moivre). • Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuaţii binome.
1. **Trasarea** prin puncte a graficelor unor funcţii. 2. **Prelucrarea** informaţiilor ilustrate prin graficul unei funcţii în scopul deducerii unor proprietăţi ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate). 3. **Utilizarea** de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi rezolvarea de ecuaţii. 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situaţii concrete şi reprezentarea prin grafice a unor funcţii care descriu situaţii practice.	**Funcţii şi ecuaţii** • Funcţia putere cu exponent natural $f : \mathbb{R} \to \mathrm{D}, f(x) = x^n$ şi $n \geq 2$ • Funcţia radical $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$, unde $\mathrm{D} = [0, \infty)$, pentru n par şi $\mathrm{D} = \mathbb{R}$, pentru n impar. • Funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to (0; \infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$ şi funcţia logaritmică $f : (0; \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, creştere exponenţială, creştere logaritmică. • Funcţii trigonometrice directe şi inverse. • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcţii inversabile: definiţie, proprietăţi grafice, condiţia

Competenţe specifice	Conţinuturi
5. **Interpretarea**, pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor. 6. **Utilizarea** echivalenţei dintre bijectivitate şi inversabilitate în trasarea unor grafice şi în rezolvarea unor ecuaţii algebrice şi trigonometrice.	necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă. • Rezolvări de ecuaţii folosind proprietăţile funcţiilor: 1. Ecuaţii iraţionale ce conţin radicali de ordinul 2 sau 3; 2. Ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice; 3. Ecuaţii trigonometrice: $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $a\in[-1;1]$, $\mathrm{tg}(x) = a$, $\mathrm{ctg}(x) = a$, $a\in\mathbb{R}$, $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\mathrm{tg} f(x) = \mathrm{tg}\, g(x)$, $\mathrm{ctg}\, f(x) = \mathrm{ctg}\, g(x)$, $a \sin(x) + b \cos(x) = c$, unde a, b, c nu sunt simultan nule. **Notă**: *Pentru toate tipurile de funcţii se vor studia: intersecţia cu axele de coordonate, ecuaţia f(x)=0, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate /convexitate.*
1. **Diferenţierea** problemelor în funcţie de numărul de soluţii admise. 2. **Identificarea** tipului de formulă de numărare adecvată unei situaţii - problemă date. 3. **Utilizarea** unor formule combinatoriale în raţionamente de tip inductiv. 4. **Exprimarea**, în moduri variate, a caracteristicilor unor probleme în scopul simplificării modului de numărare. 5. **Interpretarea** unor situaţii–problemă cu conţinut practic cu ajutorul funcţiilor şi a elementelor de combinatorică. 6. **Alegerea** strategiilor de rezolvare a unor situaţii practice în scopul optimizării rezultatelor.	**Metode de numărare** • Mulţimi finite ordonate. Numărul funcţiilor $f : A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite. • Permutări - numărul de mulţimi ordonate cu n elemente care se obţin prin ordonarea unei mulţimi finite cu n elemente; - numărul funcţiilor bijective $f : A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite. • Aranjamente - numărul submulţimilor ordonate cu câte m elemente fiecare, $m \le n$ care se pot forma cu cele n elemente ale unei mulţimi finite; - numărul funcţiilor injective $f : A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite. • Combinări - numărul submulţimilor cu câte k elemente, unde $0 \le k \le n$ ale unei mulţimi finite cu n elemente. Proprietăţi: formula combinărilor complementare, numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente. • Binomul lui Newton.
1. **Recunoaşterea** unor date de tip probabilistic sau statistic în situaţii concrete. 2. **Interpretarea primară** a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul	**Matematici financiare** • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA. • Culegerea, clasificarea şi prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică

Competenţe specifice	Conţinuturi
calculului financiar, a graficelor şi diagramelor. 3. **Utilizarea** unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităţilor pentru analiza de caz. 4. **Transpunerea** în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice. 5. **Analiza şi interpretarea** unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice. 6. **Corelarea** datelor statistice sau probabilistice în scopul predicţiei comportării unui sistem prin analogie cu modul de comportare în situaţii studiate.	a datelor statistice. • Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziţie: medii, dispersia, abateri de la medie. • Evenimente aleatoare egal probabile, operaţii cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile. • Variabile aleatoare. Probabilităţi condiţionate. Dependenţa şi independenţa evenimentelor, scheme clasice de probabilitate: schema lui Poisson şi schema lui Bernoulli. **Notă**: *Aplicaţiile vor fi din domeniul financiar: profit*, *preţ de cost al unui produs*, *amortizări de investiţii*, *tipuri de credite*, *metode de finanţare*, *buget personal*, *buget familial*.
1. **Descrierea** unor configuraţii geometrice, analitic sau utilizând vectori. 2. **Descrierea** analitică, sintetică sau vectorială a relaţiilor de paralelism şi perpendicularitate. 3. **Utilizarea** informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia şi calcul de distanţe şi arii. 4. **Exprimarea** analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configuraţii geometrice. 5. **Interpretarea** perpendicularităţii în relaţie cu paralelismul şi minimul distanţei. 6. **Modelarea** unor configuraţii geometrice, analitic, sintetic sau vectorial.	**Geometrie** • Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanţa dintre două puncte în plan. • Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector şi un număr real. • Ecuaţii ale dreptei în plan determinate de un punct şi de o direcţie dată şi ale dreptei determinate de două puncte distincte, calcule de distanţe şi arii. • Condiţii de paralelism, condiţii de perpendicularitate a două drepte din plan, calcule de distanţe şi arii.

Teste de evaluare inițială

Testul 1

• Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Partea întreagă a numărului real $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ este:

A. -1 B. 1 C. 3 D. 2

5p **2.** Se consideră o progresie aritmetică de rație -6, care are primul termen egal cu -5. Al șaptelea termen al progresiei este egal cu:

A. 21 B. -51 C. -41 D. -31

5p **3.** Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2 + 4x - 3 = 0$, atunci $q = x_1^2 + x_2^2$ este egal cu:

A. $q = 7$ B. $q = 5$ C. $q = 14$ D. $q = -7$

5p **4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $-x^2 + 7x - 12 \le 0$ este:

A. $(-\infty, 3)\cup(4, \infty)$ B. $(-\infty, 3]\cup[4, \infty)$ C. $(4, \infty)$ D. $(-\infty, 3)$

5p **5.** Se consideră punctele $A(3, -2)$ și $B(-2, 5)$. Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ este egală cu:

A. 34 B. $\sqrt{34}$ C. 24 D. $\sqrt{74}$

5p **6.** Numărul $\cos\frac{9\pi}{4}$ este egal cu:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a-1)x^2 + (2a-3)x - a + 2$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10p a) Pentru $a = -1$, rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

10p b) Pentru $a = 2$, rezolvați inecuația $f(x) \le 0$.

10p c) Determinați numărul real a, pentru care soluțiile ecuației $f(x) = 0$ verifică relația $x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2$.

2. Se consideră numerele reale a, $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a = \frac{1}{2}$ și $\cos b = \frac{1}{2}$.

10p a) Calculați $\sin b$ și $\cos a$.

10p b) Calculați $\cos(a + b)$.

10p c) Arătați că $\left(\sqrt{1+\sin^2 x} + \sqrt{1-\cos^2 x}\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1-\cos^2 x}\right) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Testul 2

• Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Partea întreagă a numărului real $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ este:

A. -1 B. 1 C. 3 D. 2

5p **2.** Se consideră o progresie aritmetică de rație -8, care are primul termen egal cu -4. Al zecelea termen al progresiei este egal cu:

A. -21 B. -66 C. -76 D. -71

5p **3.** Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $3x^2 - 2x - 5 = 0$, atunci $q = x_1^2 + x_2^2$ este egal cu:

A. $q = \frac{7}{3}$ B. $q = \frac{5}{3}$ C. $q = \frac{14}{3}$ D. $q = \frac{34}{9}$

5p **4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $-x^2 + 8x - 12 \geq 0$ este:

A. $[2, 6]$ B. $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$ C. $[6, \infty)$ D. $(-\infty, 2]$

5p **5.** Se consideră punctele $A(2, -2)$ și $B(-2, -4)$. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este egal cu:

A. 3 B. $2\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{7}$

5p **6.** Numărul $\sin\frac{3\pi}{4}$ este egal cu:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a - 3)x^2 + (-a - 3)x - a + 2$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

10p a) Pentru $a = 2$, rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

10p b) Pentru $a = -2$, rezolvați inecuația $f(x) \geq 0$.

10p c) Determinați numărul real a, pentru care soluțiile ecuației $f(x) = 0$ verifică relația $2x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2$.

2. Se consideră numerele reale $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos b = \frac{1}{2}$.

10p a) Calculați $\sin b$ și $\cos a$.

10p b) Calculați $\cos(a - b)$.

10p c) Arătați că $\left(\sqrt{1-\sin^2 x} + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)\left(\sqrt{1-\sin^2 x} - \sqrt{1+\cos^2 x}\right) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Testul 3

- Pentru rezolvarea corectă a tuturor cerințelor din Partea I și din Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Partea întreagă a numărului real $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ este egală cu:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5p **2.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni strict pozitivi și pentru care $b_1 - b_4 = 14$, $b_1 - b_2 = 8$. Termenul b_5 este egal cu:

A. 16 B. 8 C. 4 D. 1

5p **3.** Cel mai mic număr întreg m, pentru care $x^2 - 7x + m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este:

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

5p **4.** Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 9x + m = 0$ și $3x_1 - x_2 = 7$, iar $q = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, atunci:

A. $q = 16$ B. $q = 20$ C. $q = 21$ D. $q = 25$

5p **5.** Se consideră punctele $A(-2, 1)$ și $B(1, -3)$. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este egal cu:

A. 4 B. 5 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

5p **6.** Numărul $r = \dfrac{\sin 72°}{\sin 24°} - \dfrac{\cos 72°}{\cos 24°}$ este egal cu:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. 2

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a + 1)x^2 - (a - 2)x + a - 2$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

10p a) Pentru $a = 1$, rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

10p b) Determinați valorile lui a, pentru care $f(x) \leq 0$, pentru orice x real.

10p **2.** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul
$x_n = 5^n + 12n - 1$ se divide cu 16.

10p **3.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, astfel încât $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Demonstrați că punctele A, M, N sunt coliniare.

10p **4.** Fie ABC, un triunghi dreptunghic în A, și fie D, piciorul înălțimii din A. Demonstrați că $AD > AB + AC - BC$.

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulţimi de numere

1. Numere reale: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, iraţional şi real ale unui număr pozitiv. Aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale.

Avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$, $\forall\, a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$;

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{R}^*; \quad a^0 = 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*.$$

Definiţie. Fie $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numărul real pozitiv x, cu proprietatea $x^n = a$ se numeşte ***puterea cu exponent*** raţional $\frac{1}{n}$ a numărului pozitiv şi se notează $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemplu: $3^3 = 27 \Rightarrow 3 = 27^{\frac{1}{3}}$.

Din definiţie deducem:

1) $x = a^{\frac{1}{n}},\ a \geq 0 \Leftrightarrow a = x^n,\ x \geq 0.$ 2) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Proprietăţi: 1) $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; 3) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$;

4) $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$; 5) $a < b \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.

Definiţie. Fie $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Numărul $a^{\frac{m}{n}}$, definit prin $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, se numeşte ***puterea cu exponent raţional*** $\frac{m}{n}$ a numărului pozitiv a.

Exemplu: $81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Proprietăţi: Fie $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b \in (0, \infty)$. Atunci: 1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;

3) $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$; 4) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; 6) $r = s \Leftrightarrow a^r = a^s$, $a \neq 1$;

7) Dacă $a > 1$, atunci $r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$; 8) Dacă $0 < a < 1$, atunci $r < s \Leftrightarrow a^r > a^s$.

Din definiţie deducem că $a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{-m}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Exerciţii rezolvate

1. Fie *a* şi *b*, numere reale pozitive. Să se efectueze:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$; b) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$; c) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Soluţie. a) Notăm $a^{\frac{1}{2}} = x$, $b^{\frac{1}{2}} = y$; avem $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a - b$;

b) Notăm $a^{\frac{1}{3}} = x$, $b^{\frac{1}{3}} = y$; avem $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$;

c) Notăm $a^{\frac{1}{3}} = x$, $b^{\frac{1}{3}} = y$; avem $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3 = a - b$.

2. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = 2^{\frac{1}{3}}$; $b = 3^{\frac{1}{2}}$; $c = 4^{\frac{1}{4}}$.
Soluţie. Avem $a^{12} = 16$; $b^{12} = 729$; $c^{12} = 64$. Deducem $a < c < b$.

3. Să se determine numerele naturale *n*, astfel încât:

a) $3^{\frac{9n-5}{4}} = 9^{n+2}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9n-5}{4}} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{n+2}$.

Soluţie. a) Din $3^{\frac{9n-5}{4}} = 3^{2n+4}$ obţinem $\frac{9n-5}{4} = 2n+4 \Leftrightarrow 9n-5 = 8n+16 \Leftrightarrow n = 21$;

b) Din $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9n-5}{4}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+4}$ obţinem $\frac{9n-5}{4} \leq 2n+4 \Leftrightarrow 9n-5 \leq 8n+16 \Leftrightarrow n \leq 21$.
Rezultă $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 21\}$.

Exerciţii propuse

1. Să se calculeze: a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$; b) $\frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$; c) $3^{\frac{11}{15}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}$;

d) $\frac{9^{\frac{3}{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{15}}}{81^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}}$; e) $\left(0{,}01 \cdot \frac{1}{729}\right)^{-\frac{1}{2}}$; f) $\left(\frac{1}{8} \cdot 18^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Aduceţi la o formă mai simplă expresiile:

a) $E = \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$, unde $a > 0$, $b > 0$;

b) $E=\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$, unde $a>b>0$;

c) $E=\dfrac{a-2\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b}{a-b}$, unde $a>b>0$;

d) $E=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$, unde $a>0,\ b>0$;

e) $E=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$, unde $a>0,\ b>0$.

3. Calculaţi:

a) $E=\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right):\left[\left(\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}}{ba^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{4}}}\right)^{2}\right]$, unde $a>0,\ b>0$;

b) $E=\dfrac{\left[a^{\frac{2}{3}}(ab)^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}}{\left[a^{-\frac{3}{2}}(ab)^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{4}}}$, unde $a>0,\ b>0$;

c) $E=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\left(a^{-1}+b^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)$, unde $a>0,\ b>0$.

4. Ordonaţi crescător numerele:

a) $a=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}},\ b=\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{3}{4}},\ c=\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

b) $a=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{+0,1},\ b=\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-0,2},\ c=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

5. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $a=2^{\frac{1}{2}},\ b=3^{\frac{1}{3}},\ c=4^{\frac{1}{4}}$;

b) $a=3^{\frac{1}{2}},\ b=6^{\frac{1}{3}},\ c=30^{\frac{1}{6}}$;

c) $a=6^{\frac{1}{2}},\ b=12^{\frac{1}{4}},\ c=72^{\frac{1}{8}}$.

2. Aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale

Definiţie. Fie $x\in\mathbb{R}$ fixat şi $\varepsilon>0$. Se numeşte ***aproximare raţională de ordin cel mult*** ε (sau ***ε-aproximare***) a numărului real x orice număr raţional a cu proprietatea că $|x-a|\le\varepsilon$.

Se scrie: „$x \approx a$” şi se citeşte „x este aproximativ egal cu a”. Numărul x este aproximat de a cu eroarea absolută $|x - a|$.

Exemplu: Pentru $x = \pi$, avem $x \approx a = 3{,}14$, cu eroarea absolută de cel mult 0,01, deoarece $|x - a| = |\pi - 3{,}14| < 0{,}01$.

3. Puteri cu exponent iraţional şi real ale unui număr pozitiv. Proprietăţi

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ şi $x \in \mathbb{R}$, x iraţional. Numărul unic, notat a^x, care verifică respectiv condiţiile:

$$a^r < a^x < a^s, \text{ dacă } a > 1;$$
$$a^r > a^x > a^s, \text{ dacă } 0 < a < 1,$$

oricare ar fi $r, s \in \mathbb{Q}$, cu $r < x < s$, se numeşte ***puterea cu exponent x*** a numărului real a.

Numărul x se numeşte ***exponentul*** puterii a^x, iar numărul a se numeşte ***baza*** puterii a^x.

Avem $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $0^x = 0$, $\forall x > 0$.

Proprietăţi ale puterilor cu exponent real

Fie $a > 0$, $b > 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{xy}$;

4) $(ab)^x = a^x b^x$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; 6) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, $a \neq 1$;

7) Dacă $a > 1$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$;

8) Dacă $a < 1$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se determine aproximarea raţională cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{2}$.

Soluţie. Folosind algoritmul de extragere a radicalului, obţinem $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

2. Să se compare numerele reale 2^π şi $2^{\sqrt{10}}$.

Soluţie. Cum $\pi < 3{,}15 < \sqrt{10}$, deducem că $2^\pi < 2^{\sqrt{10}}$.

3. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{2x-3} \geq \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{3x-2}$.

Soluţie. Deoarece $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$, iar inecuaţia este echivalentă cu $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-2x+3} \geq \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x-2} \Leftrightarrow -2x+3 \geq 3x-2 \Leftrightarrow 5x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$.

Exerciţii propuse

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$; b) $3^{\sqrt{125}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$; c) $3^{\sqrt{3}} \cdot \left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{3^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}} \cdot \left(\frac{125}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$.

2. Să se simplifice expresiile: $E_1 = \frac{3^{2x}+2\cdot 3^x-3}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$; $E_2 = \frac{3^{3x}-3^{x+1}+2}{3^{2x}-1}$.

3. Comparaţi numerele: a) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ şi $b = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ şi $b = 1$;

c) $a = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ şi $b = 1$; d) $a = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{\pi}}$ şi $b = 1$.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E_1 = \frac{75^{\sqrt{27}} \cdot 9^{3\sqrt{3}}}{27^{\sqrt{75}} \cdot 15^{\sqrt{3}}}$; b) $E_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot 9^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 81^3$.

5. Să se compare numerele reale x şi y, ştiind că:

a) $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2\pi}{3}\right)^y$; b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^y$;

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x \geq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^y$; d) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^y$.

6. Determinaţi pentru ce valori reale ale lui x avem:

a) $3^x \leq 27$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{256}$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \frac{1}{125}$; d) $2^{-x} \geq 1024$.

7. Să se aproximeze numărul $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ cu două zecimale exacte.

8. Să se determine aproximarea raţională cu două zecimale exacte a numărului $2^{\sqrt{7}}$.

9. a) Determinaţi $x, y \in (-1, \infty)$, ştiind că:

$a^x + a^y = 2$ şi $(1+x)(1+y) = 1$, unde $a > 1$, a este fixat.

b) Determinaţi $x, y, z \in (-1, \infty)$, ştiind că:

$a^x + a^y + a^z = 3$ şi $(1+x)(1+y)(1+z) = 1$, unde $a > 1$, a este fixat.

c) Determinaţi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (-1, \infty)$, ştiind că:

$a^{x_1} + a^{x_2} + \ldots + a^{x_n} = n$ şi $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) = 1$, unde $a > 1$, a dat.

(G.M. 9 / 2006, Traian Tămâian, Carei, Satu Mare)

4. Radicalul de ordinul 2 şi radicalul de ordinul 3. Proprietăţi

Radicalul de ordinul 2

Definiţie. Fie $a \geq 0$. Numărul pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$, se numeşte ***radicalul de ordinul 2 al lui a*** şi se notează $\sqrt{a}$ (rădăcina pătrată a lui a).

Avem: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$.

Proprietăţile radicalilor de ordinul 2

1) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$;

4) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) Dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, atunci $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ şi $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Radicalul de ordinul 3

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, a fixat. Numărul real x, cu proprietatea $x^3 = a$, se numeşte ***radicalul de ordinul 3 al lui a*** şi se notează $\sqrt[3]{a}$ (rădăcina cubică a lui a).

Avem: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale radicalilor de ordinul 3

1) $\sqrt[3]{a} = a$, $a \in \mathbb{R}$;

2) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$;

4) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ şi $a = b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$.

Exerciţii rezolvate

1. Demonstraţi că $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$

(„inegalitatea mediilor" – media aritmetică ≥ media geometrică ≥ media armonică).

Soluţie. Avem $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $a = b$.

Avem $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab}(a+b) \geq 2ab \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $a = b$.

2. Scoateţi factorii de sub radical:

a) $\sqrt{200}$; b) $\sqrt{700}$; c) $\sqrt{2 \cdot 3^3 \cdot 5^5}$.

Soluţie. Avem: a) $\sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = 10\sqrt{2}$; b) $\sqrt{700} = \sqrt{7 \cdot 100} = 10\sqrt{7}$;
c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 5} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 75\sqrt{30}$.

3. Introduceţi factorii sub radical:

a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{6}$.

Soluţie. Avem: a) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2 \cdot 3}=\sqrt{12}$; b) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2 \cdot 2}=\sqrt{18}$; c) $5\sqrt{6}=\sqrt{5^2 \cdot 6}=\sqrt{150}$.

4. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$.

Soluţie. Avem: a) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 2+\sqrt{2}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3} = \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$.

5. Să se raţionalizeze numitorul fracţiei $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$, unde a şi b sunt numere reale strict pozitive.

Soluţie. În prima etapă amplificăm cu $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$ şi obţinem:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{a+b+2\sqrt{ab}-a-b} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{2\sqrt{ab}}.$$

În etapa a doua amplificăm fracţia obţinută cu $\sqrt{ab}$; rezultă: $\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}\right)}{2ab}$.

6. Demonstraţi că: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, unde $a, b, c \in (0, \infty)$; ($M_a \geq M_g \geq M_h$).

Soluţie. În identitatea algebrică $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, adevărată pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, punem $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$ şi obţinem

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Din $M_a \geq M_g$ pentru numerele $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ obţinem: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$.

Exerciţii propuse

1. Să se calculeze: a) $\sqrt{4\cdot 81}$; b) $\sqrt{25\cdot 49}$; c) $\sqrt{\frac{81}{64}}$; d) $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

2. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{-27\cdot 8}$; b) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 125}$; c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-125}{64}}$.

3. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{3a+2}$; b) $\sqrt{a^2-4a+3}$; c) $\sqrt{a+2}+\sqrt{2-a}$; d) $\sqrt{4+a^2}+\sqrt{|a|-2}$.

4. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care au sens expresiile:

a) $\sqrt[3]{1+a^3}$; b) $\sqrt[3]{8-a^3}$; c) $\sqrt[3]{3+a}+\sqrt[3]{3-a}$; d) $\sqrt[3]{(a-2)(3-a)}$.

5. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\sqrt{a(a+1)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}$; b) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}$;

c) $\sqrt{1+a^3} = \sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1-a+a^2}$; d) $\sqrt{(a-1)^2} = \left(\sqrt{a-1}\right)^2$.

6. Să se calculeze:

a) $\sqrt{18}-\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$; b) $\frac{5}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{1}{\sqrt{10}}$;

c) $\sqrt{a^2b}-\sqrt{b}+\sqrt{b^3}-\sqrt{(a+1)^2b}$, unde $a>0$, $b>0$;

d) $\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{b}-\frac{1}{\sqrt{ab}}$, unde $a,b \in (0,\infty)$.

7. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}+a\sqrt{a}$, unde $a>0$;

c) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; d) $\frac{ab}{\sqrt[3]{a}}+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, unde $a,b>0$.

8. Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$, dacă:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{x}$; b) $a\sqrt{b} = \sqrt{x}$, unde $a,b>0$, a şi b date;

c) $\sqrt{208} = x\sqrt{13}$; d) $\sqrt{a^2 b} = x\sqrt{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}$, a şi b date.

9. Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$, dacă:

a) $3\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{54}$; b) $a\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a^3 b}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}^*$, a şi b date;

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x} = 4$; d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} = b$, unde $a, b \in \mathbb{Q}^*$, a şi b date.

10. Daţi exemple de numere naturale, astfel încât:

a) $\sqrt{n}$ este raţional; b) $\sqrt{n}$ este iraţional;

c) $\sqrt[3]{n}$ este raţional; d) $\sqrt[3]{n}$ este iraţional.

11. Să se arate că numerele de mai jos nu sunt raţionale:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{3 \cdot 5}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

12. Determinaţi valorile lui a pentru care au loc egalităţile:

a) $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$; b) $\sqrt{(2-a)^2} = a - 2$;

c) $\sqrt{(3a-2)^4} = (2-3a)^2$; d) $\sqrt[3]{(a+1)^3} = a + 1$.

13. Să se arate că: a) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; b) $1{,}42 < \sqrt[3]{3} < 1{,}51$.

14. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{12}$; c) $\sqrt{18}$; d) $\sqrt{512}$; e) $\sqrt{2a^2}$; f) $\sqrt{128a^3}$.

15. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt[3]{32}$; b) $\sqrt[3]{108}$; c) $\sqrt[3]{500}$; d) $\sqrt[3]{3a^3}$; e) $\sqrt[3]{64a^4}$.

16. Să se introducă factorii sub radicali:

a) $3\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{3}$; c) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; d) $ab\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; e) $3xy\sqrt{\dfrac{5y}{3x}}$.

17. Să se introducă factorii sub radicali:

a) $2\sqrt[3]{3}$; b) $3\sqrt[3]{4}$; c) $a\sqrt[3]{b}$; d) $2\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$.

18. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\sqrt{\dfrac{12}{49}} \cdot \sqrt{\dfrac{250}{27}}$; b) $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{c}{a-\sqrt{b}}$; d) $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2\sqrt{3}-5\right)$;

e) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; f) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

19. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor: a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{4-3\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; e) $\dfrac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$; f) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

20. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$.

21. Se consideră suma

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \text{ unde } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

a) Calculaţi S_{2008}. b) Determinaţi cel mai mic n pentru care $S_n \geq 99$.

22. Să se expliciteze expresiile:

$E_1 = \sqrt{(2+x)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$; $E_2 = \sqrt[3]{(3+2x)^3}+\sqrt[3]{(3-2x)^3}$;

$E_3 = \sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}$; $E_4 = \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}$;

$E_5 = \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$.

23. Să se demonstreze identităţile (formulele radicalilor compuşi):

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}};\quad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ unde } c=\sqrt{a^2-b},$$

iar a, b şi a^2-b sunt numere reale nenegative.

24. Folosind formulele radicalilor compuşi, să se transforme expresiile:

a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{6+\sqrt{20}}$; c) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; d) $\sqrt{9+\sqrt{45}}$.

25. a) Să se demonstreze că, dacă $1 \leq x \leq 2$, atunci:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

b) Să se demonstreze că, dacă $a^2 \leq x \leq 2a^2$, $a > 0$, atunci:

$$\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}+\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}} = 2a.$$

26. a) Demonstraţi că, dacă $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $abc > 1$, atunci:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+1}{a}-2\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

b) Demonstraţi că, dacă $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ şi $\sqrt{abc} > n$, atunci:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+n^2}{a}-2n\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-n} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

27. Arătaţi că $n = \sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ este număr natural.

28. Arătaţi că $\left((n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\right)^{-1}=\left(\sqrt{n}\right)^{-1}+\left(\sqrt{n+1}\right)^{-1}$.

29. Arătaţi că partea fracţionară a numărului $\sqrt{4n^2+n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, este mai mică decât 0,25.

30. Fie $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ şi $y=\sqrt[3]{\sqrt{189}-8}-\sqrt[3]{\sqrt{189}+8}$. Arătaţi că:

$$x^{n+1}+y^n=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

31. Să se determine numerele raţionale x şi y, astfel încât:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=x+y\sqrt{5}$; b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}$; c) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$.

32. Să se calculeze: a) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{a(a+1)+2a\sqrt{a}}+\sqrt{a(a+1)-2a\sqrt{a}}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

33. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[3]{a^3+3a^2+(3a^2+a)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{a^3+3a^2-(3a^2+a)\sqrt{a}}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

34. Să se calculeze:

a) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$; b) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$;

c) $\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1\right)$; d) $\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)$.

35. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-1}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; e) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; f) $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

36. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$.

37. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+2}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{a}+2}$; c) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

38. Să se compare numerele:

a) $a=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ şi $b=\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}}$;

b) $a=\dfrac{n+1}{n}\cdot\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ şi $b=\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $a=\frac{5}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ şi $b=\frac{6}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}$;

d) $a=\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}$ şi $b=\frac{n+2}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{n+2}{n+1}}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

39. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze inegalităţile, precizând când are loc semnul egal:

a) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\geq 4$, unde $a>0$, $b>0$;

b) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 8$, unde $a,b,c>0$;

c) $\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n}{a_1}\right)\geq 2^n$, unde $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$.

40. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că au loc inegalităţile, precizând când are loc semnul egal:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$, unde $a, b>0$;

b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{8}{(a+b)^2}$, unde $a, b>0$;

c) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\geq\frac{2^{n+1}}{(a+b)^n}$, unde $a, b>0$, $n\in\mathbb{N}$.

41. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că au loc inegalităţile, precizând când are loc semnul egal:

a) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{4}{a+b}$, unde $a>0$, $b>0$;

b) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{a^3}\geq\frac{8}{(a+b)^2}$, unde $a>0$, $b>0$;

c) $\frac{a}{b^{n+1}}+\frac{b}{a^{n+1}}\geq\frac{2^{n+1}}{(a+b)^n}$, unde $a>0$, $b>0$, $n\in\mathbb{N}$.

42. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că au loc inegalităţile, precizând când are loc semnul egal:

a) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}$, unde $a>0$, $b>0$, $c>0$;

b) $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq\frac{81}{(a+b+c)^3}$, unde $a>0$, $b>0$, $c>0$;

c) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\geq\frac{3^{n+1}}{(a+b+c)^n}$, unde $a>0$, $b>0$, $c>0$, $n\in\mathbb{N}$.

43. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că au loc inegalităţile, precizând când are loc semnul egal:

a) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{9}{a+b+c}$, unde $a>0,\ b>0,\ c>0$;

b) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}$, unde $a>0,\ b>0,\ c>0$;

c) $\frac{a}{b^{n+1}}+\frac{b}{c^{n+1}}+\frac{c}{a^{n+1}}\geq\frac{3^{n+1}}{(a+b+c)^n}$, unde $a>0,\ b>0,\ c>0,\ n\in\mathbb{N}$.

5. Radicalul de ordinul *n*, $n \geq 2$. Proprietăţi

Radicalul de ordin par dintr-un număr pozitiv

Definiţie. Fie $a \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Număr pozitiv x care satisface condiţia $x^{2n}=a$, $a \geq 0$, se numeşte ***radical de ordinul 2n al lui a***. Se notează $\sqrt[2n]{a}$ (rădăcina de ordinul $2n$).

Avem $\sqrt[2n]{a}\geq 0$; $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, $a\geq 0$.

Observaţii. Pentru orice $a\geq 0$, avem $\sqrt[2n]{a}=a^{\frac{1}{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Pentru orice $a\in\mathbb{R}$, avem $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Radicalul de ordin impar dintr-un număr real

Definiţie. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Număr real x care satisface condiţia $x^{2n+1}=a$ se numeşte ***radical de ordinul 2n + 1 al lui a***. Se notează $\sqrt[2n+1]{a}$ (rădăcina de ordinul $2n+1$).

Avem $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1}=a$, $a\in\mathbb{R}$.

Observaţii. Pentru $a\geq 0$, avem $\sqrt[2n+1]{a}=a^{\frac{1}{2n+1}}$.

Pentru $a\in\mathbb{R}$, avem $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$ şi $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.

Reţinem: Pentru radicalul de ordin par, $\sqrt[2n]{a}$ are sens numai dacă $a\geq 0$, iar pentru radicalul de ordin impar, $\sqrt[2n+1]{a}$ are sens pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Proprietăţile radicalilor de ordinul *n*, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

Fie $a>0$, $b>0$ şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Au loc proprietăţile:

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\sqrt[n]{a^{mn}} = \left(\sqrt[n]{a^n}\right)^m = a^m$, $m \in \mathbb{N}^*$; 4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{N}^*$;

5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$; 6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$;

7) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$; 8) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{N}$; 9) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

Teoremă. (Inegalitatea mediilor) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$. Notăm:

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \text{ (media aritmetică);}$$

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \text{ (media geometrică);}$$

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \text{ (media armonică).}$$

Are loc inegalitatea $M_a \geq M_g \geq M_h$, adică

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Avem $M_a = M_g = M_h$ dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Exerciţii rezolvate

1. Scrieţi expresiile $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{3}}$ şi $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[7]{4}$, folosind un singur radical.

Soluţie. Aducem radicalii la acelaşi ordin: $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{\sqrt[4\cdot 5]{2^5}}{\sqrt[5\cdot 4]{3^4}} = \frac{\sqrt[20]{32}}{\sqrt[20]{81}} = \sqrt[20]{\frac{32}{81}}$;

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[7]{4} = \sqrt[5\cdot 7]{2^7} \cdot \sqrt[7\cdot 5]{4^5} = \sqrt[35]{2^7} \cdot \sqrt[35]{2^{10}} = \sqrt[35]{2^7 \cdot 2^{10}} = \sqrt[35]{2^{17}}.$$

2. Să se compare numerele: a) $x = \sqrt[4]{2}$ şi $y = \sqrt[5]{3}$; b) $x = \sqrt[5]{2}$ şi $y = \sqrt[8]{3}$.

Soluţie. Aducem radicalii la acelaşi ordin:

a) $x = \sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 5]{2^5} = \sqrt[20]{32}$ şi $y = \sqrt[5]{3} = \sqrt[5\cdot 4]{3^4} = \sqrt[20]{81}$. Rezultă $a < b$;

b) $x = \sqrt[5]{2} = \sqrt[5\cdot 8]{2^8} = \sqrt[40]{256}$ şi $y = \sqrt[8]{3} = \sqrt[8\cdot 5]{3^5} = \sqrt[40]{243}$. Rezultă $a > b$.

3. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[4]{2} - 1}$; d) $\frac{1}{\sqrt[n]{a} - 1}$.

Soluţie. a) Amplificăm fracţia cu conjugata lui $\sqrt[4]{2}$, adică amplificăm fracţia cu

$\sqrt[4]{2^3}$ şi obţinem: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; b) Amplificăm fracţia cu $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ şi obţinem: $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$; c) Amplificăm fracţia cu $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3+\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+\sqrt[4]{2}+1$ şi obţinem: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3+\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+\sqrt[4]{2}+1}{2-1}=\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}+1$; d) Amplificăm fracţia cu $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}+...+\sqrt[n]{a}+1$ şi obţinem: $\frac{1}{\sqrt[n]{a}-1}=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}+...+\sqrt[n]{a}+1}{a-1}$.

Exerciţii propuse

1. Să se calculeze: a) $\sqrt[4]{81}$; b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; c) $\sqrt[4]{0{,}0001}$; d) $\sqrt[4]{x^4}$, $x\in\mathbb{R}$;

e) $\sqrt[5]{32}$; f) $\sqrt[5]{-243}$; g) $\sqrt[5]{x^5}$, $x\in\mathbb{R}$; h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$.

2. Să se scrie expresiile folosind un singur radical:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$; b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[3]{6}}$; d) $\frac{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+2]{a}}$.

3. Comparaţi numerele: a) $x=\sqrt[4]{4}$ şi $y=\sqrt[5]{5}$; b) $y=\sqrt[5]{5}$ şi $z=\sqrt[6]{6}$.

4. Arătaţi că: $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}$.

5. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor: a) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{3}}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{a}-\sqrt[3]{b}}$; e) $\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$; f) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; g) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

6. Ordonaţi numerele: a) $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt[3]{3}$, $z=\sqrt[4]{4}$;

b) $x=\sqrt[3]{2}$, $y=\sqrt{3}$, $z=\sqrt[5]{5}$; c) $x=\sqrt[6]{4}$, $y=\sqrt[8]{5}$, $z=\sqrt[12]{10}$.

7. Calculaţi: a) $\frac{\sqrt[7]{9}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6}}{\left(\sqrt{12}\right)^{-1}\cdot 3^{-10}}$; b) $\frac{3^{\frac{8}{5}}\cdot\sqrt[3]{243}\cdot 27^{-\frac{1}{5}}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{5}}}$;

c) $\frac{\left(\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[4]{343}\right)^{-3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{343}\cdot 7^{\frac{4}{5}}}$; d) $\frac{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[7]{4}\cdot\sqrt[5]{8^4}\cdot 16^{-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 2^{-5}\cdot\frac{\sqrt{16}}{2}}$.

8. Fie $a > 0$. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}}\right)^4$; b) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}\right)^2$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}}}:\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}}$.

9. Arătaţi că: a) $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\left(1\pm\sqrt{5}\right)^3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1\pm\sqrt{5}\right)$;

b) $\sqrt[5]{11\pm5\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^4}}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$; c) $\sqrt[5]{3+5\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[5]{3+5\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}=1$.

10. Fie expresia $E(x,y)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{3}}$.

a) Aduceţi $E(x,y)$ la forma cea mai simplă.

b) Calculaţi $E(5, 20)$.

11. a) Demonstraţi că: $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx)(x+y+z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

b) Demonstraţi că:

$$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)=a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc}.$$

c) Raţionalizaţi numitorii fracţiilor: $F_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$, $F_2=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$,

$F_3=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}}$, $F_4=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+3\cdot\sqrt[3]{2}-1}$.

12. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor: a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+3}$; b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$.

13. a) Arătaţi că, dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ şi $a+b\sqrt{3}=0$, atunci $a=b=0$.

b) Arătaţi că, dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ şi $a+b\cdot\sqrt[3]{3}+c\cdot\sqrt[3]{9}=0$, atunci $a=b=c=0$.

14. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că:

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)^n+\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)^n+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^n\geq 4$, $n\in\mathbb{N}$;

c) $\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)^n+\left(\sqrt{b+1}-\sqrt{b}\right)^n+\left(\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\right)^n+\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)^n\geq 4$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$, $b>0$.

15. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$.

16. Să se scrie în ordine descrescătoare numerele: $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[8]{72}$.

17. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că:

a) $\dfrac{a}{b}+2\cdot\sqrt{\dfrac{b}{c}}+3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}\geq 6$, unde $a,b,c>0$;

b) $a+b+c+\dfrac{1}{abc}\geq 4$, unde $a,b,c>0$;

c) $a_1+a_2+...+a_n+\dfrac{1}{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}\geq n+1$, unde $a_1,a_2,...,a_n>0$;

d) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, unde $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$;

e) $(n!)^2<\left(\dfrac{2n^2+3n+1}{6}\right)^n$, unde $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$;

f) $(n!)^3<\left(\dfrac{n^3+2n^2+n}{4}\right)^n$, unde $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

18. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\geq\dfrac{16}{a+b+c+d}$, unde $a,b,c,d>0$;

b) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\geq\dfrac{64}{(a+b+c+d)^2}$, unde $a,b,c,d>0$;

c) $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}+\dfrac{1}{d^n}\geq\dfrac{4^{n+1}}{(a+b+c+d)^n}$, unde $a,b,c,d>0,\ n\in\mathbb{N}$.

19. Folosind inegalitatea mediilor, să se demonstreze că:

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}\geq 4$, unde $a,b,c,d>0$;

b) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{c}{d^2}+\dfrac{d}{a^2}\geq\dfrac{16}{a+b+c+d}$, unde $a,b,c,d>0$;

c) $\dfrac{a}{b^{n+1}}+\dfrac{b}{c^{n+1}}+\dfrac{c}{d^{n+1}}+\dfrac{d}{a^{n+1}}\geq\dfrac{4^{n+1}}{(a+b+c+d)^n}$, unde $a,b,c,d>0,\ n\in\mathbb{N}$.

20. Să se determine valorile lui x pentru care:

a) $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}}=\sqrt[5x]{2x}$;   b) $\sqrt[2x+1]{\sqrt[11-4x]{(-2x)^{3x}}}=\sqrt[3x-1]{7x+2}$.

6. Noţiunea de logaritm. Proprietăţi ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operaţia de logaritmare

Definiţie. Fie $a>0$, $a\neq 1$ şi $y>0$. Unicul număr real x care satisface condiţia $a^x=y$ se numeşte ***logaritmul în baza* a *al numărului strict pozitiv y***. Se notează $x=\log_a y$; se citeşte „*logaritmul în baza a din y*”.

Avem: $\boxed{x=\log_a y\Leftrightarrow a^x=y}$.

Avem: $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$; $\log_a a^x=x$.

Exemple: $\log_2 32=5$, deoarece $2^5=32$; $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$, deoarece $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$.

Identitate remarcabilă. $\boxed{a^{\log_a y} = y}$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$.

Aplicaţie. $9^{\log_3 2} = \left(3^2\right)^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = 4$.

Proprietăţile logaritmilor

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $x,y > 0$. Au loc proprietăţile:

1) $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$;

2) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$;

3) $\log_a x^p = p\log_a x$, $p \in \mathbb{R}$.

Formula de schimbare a bazei: $\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$; în particular $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze: a) $\log_{21} 3 + \log_{21} 7$; b) $\log_{15} 45 - \log_{15} 3$; c) $\log_2 3^4$.

Soluţie. a) $\log_{21} 3 + \log_{21} 7 = \log_{21}(3 \cdot 7) = \log_{21} 21 = 1$; b) $\log_{15} 45 - \log_{15} 3 = \log_{15} \dfrac{45}{3} = \log_{15} 15 = 1$; c) $\log_2 3^4 = 4\log_2 3$.

2. Să se arate că expresia $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ nu depinde de x.

Soluţie. Se aduc logaritmii în baza 10. Avem: $E = \dfrac{\dfrac{\lg x}{\lg 2}}{\dfrac{\lg x}{\lg 3}} = \dfrac{\lg 3}{\lg 2} = \log_2 3$.

3. Să se exprime $E = \log_{15} 81$ în funcţie de $a = \log_3 25$.

Soluţie. Din $a = \log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$ obţinem $\log_3 5 = \dfrac{a}{2}$. Avem

$$E = \log_{15} 3^4 = 4\log_{15} 3 = \frac{4}{\log_3 15} = \frac{4}{\log_3 (3\cdot 5)} = \frac{4}{\log_3 3 + \log_3 5} = \frac{4}{1+\log_3 5} = \frac{4}{1+\frac{a}{2}} = \frac{8}{a+2}.$$

Proprietăţi de monotonie ale logaritmilor

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $x,y > 0$. Atunci:

i) Dacă $a > 0$, avem $x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$;

ii) Dacă $0 < a < 1$, avem $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$;

iii) $x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$.

Operaţia de logaritmare

Fie E, o expresie algebrică în care apar produse şi câturi de puteri; operaţia prin care asociem expresiei E expresia $\log_a E$, unde a este o bază oarecare, $a > 0$, $a \neq 1$, se numeşte ***operaţia de logaritmare***.

Exemplu: Fie expresia $E = 2xy^2z^3$, unde $x,y,z > 0$ şi $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritmând în baza a expresia E, obţinem: $\log_a E = \log_a(2xy^2z^3) = \log_a 2 + \log_a x + \log_a y^2 + \log_a z^3 =$ $= \log_a 2 + \log_a x + 2\log_a y + 3\log_a z$.

Observaţie. Are sens $\log_{f(x)} g(x)$ dacă şi numai dacă $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se determine valorile lui x pentru care este definită expresia $E = \log_{x-1}(x^2 - 2x)$.
Soluţie. Se impun condiţiile: $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$, $x^2 - 2x > 0$. Obţinem: $x > 1$, $x \neq 2$, $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. În final, deducem: $x \in (2, \infty)$.

2. Să se studieze semnul expresiei $E = \lg(x^2 - 3)$.
Soluţie. Condiţia de existenţă pentru logaritm este $x^2 - 3 > 0$, de unde $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Pentru a stabili semnul logaritmului, comparăm $x^2 - 3$ cu 1. Dacă $x^2 - 3 > 1$, atunci $\lg(x^2 - 3) > \lg 1 = 0$; dacă $x^2 - 3 < 1$, atunci $\lg(x^2 - 3) < \lg 1 = 0$; dacă $x^2 - 3 = 1$, atunci $\lg(x^2 - 3) = \lg 1 = 0$.

Se recomandă întocmirea tabloului:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\lg(x^2 - 3)$	+ +	+ + +	0	− − − −	0	+ + + +	+ +

Exerciţii propuse

1. Să se determine x, ştiind că:

a) $\log_3 x = 2$; b) $\log_x 9 = 2$; c) $\log_3 \frac{1}{81} = x$;

d) $\log_x \frac{1}{27} = \frac{2}{3}$; e) $\log_{3\sqrt{3}} x = 2$; f) $\log_{0,1} 2 = x$.

2. Folosind definiţia logaritmului, să se calculeze:

a) $\log_2 0,25$; b) $\log_3 9 \cdot \sqrt[3]{3}$; c) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{2}$; d) $\lg \frac{1}{100}$;

e) $\lg\sqrt[3]{100}$; f) $\ln e^3$; g) $\ln\frac{1}{e^2}$.

3. Să se scrie soluţiile ecuaţiilor următoare sub forma unor logaritmi:

a) $3^x = 2$; b) $2^{-x} = 3$; c) $4^x = 5$; d) $5^x = \frac{1}{6}$;

e) $10^x = 11$; f) $\frac{1}{10^x} = 13$; g) $e^x = 2$; h) $2^x = 3^x$.

4. Să se calculeze:

a) $2^{\log_2 3}$; b) $3^{3\log_3 2}$; c) $(0,1)^{\lg 2}$; d) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\lg 3}$; e) $e^{\ln 3}$;

f) $\left(\frac{1}{e}\right)^{3\ln 2}$; g) $10^{\lg e} + e^{\ln 10}$; h) $\left(\frac{1}{10}\right)^{3\lg e} + \left(\frac{1}{e}\right)^{2\ln 10}$.

5. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\lg(4-a^2) = \lg(2-a) + \lg(2+a)$; b) $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$;

c) $\ln\frac{a-3}{a+3} = \ln(a-3) - \ln(a+3)$; d) $\lg\sqrt{3a+2} = \frac{1}{2}\lg(3a+2)$.

6. Să se calculeze: a) $3\log_2 128 - 2\log_3 81$; b) $\log_3(\log_3 729)$; c) $2^{3-\log_2 3}$;

d) $\left(2^{\log_{\frac{1}{3}} 3}\right)^3$; e) $3^{2\log_3 4}$; f) $\sqrt{5^{2\log_5 3}} - \sqrt{6^{2\log_6 2}}$.

7. Folosind proprietăţile logaritmilor, calculaţi:

a) $\log_2 60 + \log_2\frac{1}{15}$; b) $\log_5 100 - \log_5 4$; c) $\log_3 243$;

d) $\lg 0,13 - \lg 130$; e) $\ln\sqrt{e} + \ln\frac{e}{2}$; f) $\frac{\ln 9}{\ln 3}$.

8. Folosind proprietăţile logaritmilor, calculaţi:

a) $9^{\log_3 2} + \frac{1}{3}\log_2\sqrt{27}$; b) $\log_3 5\cdot\log_5 3$; c) $\log_3 20$;

d) $\log_2\frac{\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[3]{16}}$; e) $\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt[4]{4}} 4$; f) $\frac{\ln 6}{\lg 6}$.

9. Folosind proprietăţile logaritmilor, calculaţi:

a) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 4 + 2^{\log_2 3}$; b) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$;

c) $\log_5 7 - \log_5\frac{7}{25}$; d) $\log_4 12 + \log_4 32 - \log_4 3$;

e) $\log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}} 18 + \log_{\frac{1}{3}} 3$; f) $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + ... + \lg\frac{9}{10}$.

10. Să se arate că:

a) $(\lg 5)^3+(\lg 20)^3+\lg 8\cdot\lg 0{,}25=2$; b) $(\lg 2)^3+(\lg 50)^3+\lg 125\cdot\lg 0{,}04=2$;

c) $\lg^3\left(\frac{10}{a}\right)+\lg^3(10a)+\lg a^3\cdot\lg\frac{1}{a^2}=2$, unde $a>0$.

11. Să se arate că: a) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{-1}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{8}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 32^{\frac{1}{2}}}=\frac{19}{4}$; b) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{5}{3}}\cdot 32^{-1}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 32^{\frac{1}{2}}}=\frac{9}{4}$;

c) $\log_{\frac{1}{a}}\frac{a^{-\frac{4}{3}}\cdot a^4\cdot\sqrt[3]{a^{-5}}}{\sqrt[4]{a^5}\cdot a^{-\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}}=-\frac{1}{2}$, unde $a>1$.

12. Să se arate că: a) $\frac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}=3$; b) $\frac{\log_3 54}{\log_{162}3}-\frac{\log_3 18}{\log_{486}3}=2$.

c) $\frac{\log_2(2^a\cdot 3)}{\log_{2^b\cdot 2}2}-\frac{\log_2(2^c\cdot 3)}{\log_{2^d\cdot 3}2}=ab-cd$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{N}^*$, cu $a+b=c+d$;

d) $\frac{\log_3(3^a\cdot 2)}{lo_{3^b\cdot 2}3}-\frac{\log_3(3^c\cdot 2)}{\log_{3^d\cdot 2}3}=ab-cd$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{N}^*$, cu $a+b=c+d$.

13. Fie $a,b,c>0$. Să se arate că:

a) $a^{\lg\frac{b}{c}}\cdot b^{\lg\frac{c}{a}}\cdot c^{\lg\frac{a}{b}}=1$; b) $\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg\frac{b}{c}}\cdot\left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg\frac{c}{a}}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg\frac{a}{b}}=1$;

c) $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\ln\frac{b}{c}}\cdot\left(\frac{b^2}{ca}\right)^{\ln\frac{c}{a}}\cdot\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\ln\frac{a}{b}}=1$; d) $\left(\frac{a^n}{bc}\right)^{\lg\frac{b}{c}}\cdot\left(\frac{b^n}{ca}\right)^{\lg\frac{c}{a}}\cdot\left(\frac{c^n}{ab}\right)^{\lg\frac{a}{b}}=1$, $n\in\mathbb{N}$.

14. Să se arate că:

a) $\log_a b+\log_a b^2+\ldots+\log_a b^n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\log_a b$;

b) $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lg\frac{1}{n}$;

c) $\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lg\frac{n+1}{n}$;

d) $\log_{a^2}b+\log_{a^6}b+\ldots+\log_{a^{n(n+1)}}b=\frac{n}{n+1}\log_a b$.

15. Fie $a=\log_{12}18$ şi $b=\log_{24}54$.

a) Să se exprime *a* şi *b* în funcţie de $\log_2 3$.

b) Să se exprime *a* în funcţie de *b*.

c) Să se exprime *b* în funcţie de *a*.

16. a) Fie $a=\log_{30}3$ şi $b=\log_{30}5$. Calculaţi $\log_{30}8$ în funcţie de *a* şi *b*.

b) Fie $a=\log_{70}5$ şi $b=\log_{70}7$. Calculaţi $\log_{70}16$ în funcţie de a şi b.

c) Fie $a=\log_{2xy}x$ şi $b=\log_{2xy}y$, unde $x,y\in\mathbb{N}$. Calculaţi $\log_{2xy}2^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, în funcţie de a şi b.

17. Să se arate că expresiile următoare nu depind de x:

a) $E=\dfrac{\log_3 x^2}{\log_5 x^3}$; b) $E=\dfrac{\log_a x^n}{\log_b x^m}$; c) $E=\dfrac{\log_x\sqrt{2}}{\log_x 2}$;

d) $E=\dfrac{\log_x\sqrt[n]{a}}{\log_x a}$; e) $E=\dfrac{\log_5 x+\log_5\sqrt{x}}{\log_7 x+\log_7\sqrt{x}}$; f) $E=\dfrac{\log_a x+\log_a\sqrt[n]{x}}{\log_b x+\log_b\sqrt[n]{x}}$.

18. a) Fie $a=\log_{12}2$ şi $b=\log_{12}5$. Calculaţi $\log_6 40$ în funcţie de a şi b.

b) Fie $a=\log_{24}2$ şi $b=\log_{24}5$. Calculaţi $\log_6 80$ în funcţie de a şi b.

c) Fie $a=\log_{2^n\cdot 3}2$ şi $b=\log_{2^n\cdot 3}5$. Calculaţi $\log_6(2^m\cdot 5)$, unde $m, n\in\mathbb{N}^*$.

19. Să se compare numerele:

a) $\log_2 5$ şi $\log_2 6$; b) $\log_{\frac{1}{2}}5$ şi $\log_{\frac{1}{2}}6$; c) $\log_a 5$ şi $\log_a 6$; d) 2 şi $\log_3 8$;

e) $2n$ şi $\log_3 8^n$; f) 6 şi $\log_2 63$; g) n şi $\log_2(2^n-1)$; h) n şi $\log_2(2^n+1)$.

20. Stabiliţi semnul expresiei $E=\log_2 3\cdot\log_3\dfrac{1}{4}\cdot\log_{0,5}6\cdot\log_{0,6}0,7$.

21. Să se arate că: a) $\log_2 3>\log_3 4$; b) $\log_3 4>\log_4 5$;

c) $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

22. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $a^2+b^2=3ab$ şi $\lg\dfrac{a+b}{\sqrt{5}}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$;

b) $a^2+b^2=(2n-1)ab$ şi $\lg\dfrac{a+b}{\sqrt{2n+1}}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$, $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $a^2+b^2=7ab$ şi $\lg\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$;

d) $a^2+b^2=(n^2-2)ab$ şi $\lg\dfrac{a+b}{n}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$ şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

e) $4a^2+9b^2=88ab$ şi $\lg\dfrac{2a+3b}{10}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$;

f) $n^2a^2+m^2b^2=(p^2-2mn)ab$ şi $\lg\dfrac{na+mb}{p}=\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$, unde $a, b>0$, $m, n, p\in\mathbb{N}^*$, $p^2>2mn$.

23. a) Fie $E=\log_a\dfrac{a+b}{2}+\log_b\dfrac{a+b}{2}$, unde $a, b\in(1,\infty)$. Să se arate că $E\geq 2$.

b) Fie $E = \log_a \sqrt{ab} + \log_b \sqrt{ab}$, unde $a, b \in (1, \infty)$. Să se arate că $E \geq 2$.

c) Fie $E = \log_a \dfrac{2ab}{a+b} + \log_b \dfrac{2ab}{a+b}$, unde $a, b \in (0, 1)$. Să se arate că $E \geq 2$.

d) Fie $E = \log_a \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} + \log_b \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, unde $a, b \in (1, \infty)$. Să se arate că $E \geq 2$.

24. Să se demonstreze că numerele: $\log_2 3$, $\log_3 6$ şi $\log_{\frac{1}{3}} 10$ sunt iraţionale.

25. a) Dacă $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, să se calculeze $\dfrac{x}{y}$.

b) Dacă $2\lg(x-6y) = \lg x + \lg y$, să se calculeze $\dfrac{x}{y}$.

c) Dacă $2\lg(x-12y) = \lg x + \lg y$, să se calculeze $\dfrac{x}{y}$.

d) Dacă $2\lg\left(x - n(n+1)y\right) = \lg x + \lg y$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n este fixat, să se calculeze raportul $\dfrac{x}{y}$.

26. a) Dacă $2\lg\left(x - \dfrac{2}{y}\right) = \lg x - \lg y$, să se calculeze xy.

b) Dacă $2\lg\left(x - \dfrac{6}{y}\right) = \lg x - \lg y$, să se calculeze xy.

c) Dacă $2\lg\left(x - \dfrac{12}{y}\right) = \lg x - \lg y$, să se calculeze xy.

d) Dacă $2\lg\left(x - \dfrac{n(n+1)}{y}\right) = \lg x - \lg y$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat, să se calculeze produsul xy.

27. Să se determine valoarea numerică a expresiei: $E = \dfrac{2^3 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{3}}$, folosind operaţia de logaritmare şi aproximarea cu 2 zecimale exacte: lg 2 = 0,30 şi lg 3 = 0,47.

28. Logaritmaţi expresiile: a) $E = 2ab^2c^3$; b) $E = \dfrac{5a^2b^3}{3c^4}$; c) $E = \dfrac{2a \cdot \sqrt[2]{b}}{3b \cdot \sqrt[3]{c^2}}$;

d) $E = \sqrt[4]{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$; e) $E = \left(\sqrt[5]{\dfrac{a}{2b}}\right)^3$; f) $E = \dfrac{11^3 \cdot \sqrt[7]{13\sqrt{22}}}{17 \cdot \sqrt[5]{19^2\sqrt{23}}}$.

29. Restrângeţi expresiile:

a) $E=\frac{3\log_2 5}{2}-\frac{\log_2 3}{4}+\frac{1}{2}$; b) $E=3\lg a-\frac{1}{3}\lg b-2\lg 2$;

c) $E=\lg a+3\lg b-\frac{1}{2}\lg c$; d) $E=\frac{1}{2}\ln\sqrt[2]{3}+\frac{1}{3}\ln\sqrt{3}+\log_{\sqrt{e}}3-3$;

e) $E=2\lg a-3\lg b+\frac{1}{2}\lg\sqrt{c}$; f) $E=\frac{1}{3}\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\sqrt[3]{2}+\log_{\sqrt{e}}2-2$.

30. Determinaţi expresia lui x, ştiind că:

a) $\log_a x=\log_a 2+\log_a 3-\log_a 5$; b) $\log_a x=2\log_a 3+3\log_a 5-5\log_a 7$;

c) $\log_2 x=-\frac{1}{2}\log_4(a+b)+\frac{1}{3}\log_4(a-b)$; d) $\lg x=n\log_a(n+1)-(n+1)\log_a n$;

e) $\ln x=2\ln(a+b)-3\ln\sqrt{a+b}$.

31. Dacă $a, b, c>0$ şi $c\neq 1$, arătaţi că $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$.

32. Arătaţi că, dacă $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$ sunt în progresie aritmetică, atunci x, y, z sunt în progresie geometrică. Verificaţi şi afirmaţia reciprocă.

33. Fie $a, b, c, x\in(1,\infty)$. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci:

$$\frac{2}{\log_b x}=\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}.$$

34. a) Arătaţi că: $\log_2 3>\frac{3}{2}$;

b) Arătaţi că: $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6=\log_2 6$.

c) Demonstraţi inegalitatea: $\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6>5$.

d) Demonstraţi că, pentru orice $n\geq 5$, are loc inegalitatea:

$\log_2 3+\log_3 4+...+\log_n(n+1)>5$. (Mircea Berca, Huşi)

35. a) Să se arate că, dacă $a, b, c\in(1,\infty)$ sau $a, b, c\in(0,1)$, atunci:

$$\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

b) Fie $a, b, c\in(1,\infty)$ sau $a, b, c\in(0,1)$, să se demonstreze că:

$$\frac{\log_a b}{c}+\frac{\log_b c}{a}+\frac{\log_c a}{b}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$ (G.M. 10/2006, Dorin Mărghidan, Corabia, Olt)

c) Fie $a, b, c\in(1,\infty)$ sau $a, b, c\in(0,1)$ şi $n\in\mathbb{N}$. Demonstraţi că:

$$\frac{\log_a b}{c^n}+\frac{\log_b c}{a^n}+\frac{\log_c a}{b^n}\geq\frac{9}{a^n+b^n+c^n}.$$ (Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

36. a) Dacă $a, b, c\in(0,1)$ sau $a, b, c\in(1,\infty)$, arătaţi că:

$\log_{a^2b}a+\log_{b^2c}b+\log_{c^2a}c\leq 1$. (GM 9/2006, Gh. Ghiţă, Buzău)

b) Dacă $a, b, c\in(0,1)$ sau $a, b, c\in(1,\infty)$ şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, arătaţi că:

$\log_{a^n b} a + \log_{b^n c} b + \log_{c^n a} c \le \dfrac{3}{n+1}$. (OM 2008, Argeş, Etapa locală, Marin Chirciu)

c) Dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, arătaţi că:

$\log_{ab^n} a + \log_{bc^n} b + \log_{ca^n} c \ge \dfrac{3}{n+1}$. (OM 2008, Argeş, Marin Chirciu)

37. a) Dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$, arătaţi că:

$\dfrac{1}{2+\log_a b} + \dfrac{1}{2+\log_b c} + \dfrac{1}{2+\log_c a} \le 1$. (GM. 3/2007, Marin Chirciu, Piteşti)

b) Dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$ şi $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$, arătaţi că:

$$\frac{1}{n+\log_a b} + \frac{1}{n+\log_b c} + \frac{1}{n+\log_c a} \le \frac{3}{n+1}.$$

38. a) Dacă $a, b, c > 1$, demonstraţi că: $\log_{ab^2c^2} a + \log_{bc^2a^2} b + \log_{ca^2b^2} c \ge \dfrac{3}{5}$.

(GM 5/2007, Mihaly Bencze, Braşov)

b) Dacă $a, b, c, n > 1$, demonstraţi că: $\log_{ab^nc^n} a + \log_{bc^na^n} b + \log_{ca^nb^n} c \ge \dfrac{3}{2n+1}$.

c) Dacă $a, b, c, n, m > 1$, demonstraţi că: $\log_{ab^nc^m} a + \log_{bc^na^m} b + \log_{ca^nb^m} c \ge \dfrac{3}{m+n+1}$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

39. Demonstraţi că:

a) $\dfrac{\log_a b}{c} + \dfrac{\log_b c}{a} + \dfrac{\log_c a}{b} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$, $\forall\, a, b, c \in (1, \infty)$;

b) $\dfrac{\log_a b}{c^2} + \dfrac{\log_b c}{a^2} + \dfrac{\log_c a}{b^2} \ge \dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$, $\forall\, a, b, c \in (1, \infty)$;

c) $\dfrac{\log_a b}{c^n} + \dfrac{\log_b c}{a^n} + \dfrac{\log_c a}{b^n} \ge \dfrac{9}{a^n+b^n+c^n}$, $\forall\, a, b, c \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

40. Fie $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstraţi inegalităţile:

a) $\dfrac{\log_a b}{a+b} + \dfrac{\log_b c}{b+c} + \dfrac{\log_c a}{c+a} \ge \dfrac{9}{2(a+b+c)}$;

b) $\dfrac{(\log_a b)^2}{a+b} + \dfrac{(\log_b c)^2}{b+c} + \dfrac{(\log_c a)^2}{c+a} \ge \dfrac{9}{2(a+b+c)}$;

c) $\dfrac{(\log_a b)^n}{a+b} + \dfrac{(\log_b c)^n}{b+c} + \dfrac{(\log_c a)^n}{c+a} \ge \dfrac{9}{2(a+b+c)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $\dfrac{(\log_{ab} c)^2}{a+b} + \dfrac{(\log_{bc} a)^2}{b+c} + \dfrac{(\log_{ca} b)^2}{c+a} \ge \dfrac{9}{8(a+b+c)}$;

(OM 2004, Dolj, Marius Ghergu)

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
Adresa: IAȘI , Bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, nr. 2 -
700124 Telefon: 0763 082 213
E-mail: comenzi@ecredu.ro
Tipărit în România