MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, geometrie, trigonometrie

Clasa a IX-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Iași - 2019

CUPRINS

PROGRAMA ŞCOLARĂ PENTRU CLASA A IX-A MATEMATICĂ

aprobată prin Ordinul Ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 3410, 3411/16.03.2009

TRUNCHI COMUN ŞI CURRICULUM DIFERENŢIAT - 4 ore

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. **Identificarea** în limbaj cotidian sau în probleme de matematică a unor noţiuni specifice logicii matematice şi teoriei mulţimilor. 2. **Utilizarea** proprietăţilor algebrice ale numerelor, a estimărilor şi aproximărilor în contexte variate, inclusiv folosind calculatorul. 3. **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calcului cu numere reale. 4. **Deducerea** unor rezultate şi verificarea acestora utilizând inducţia matematică sau alte raţionamente logice. 5. **Redactarea** rezolvării unei probleme corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice şi al teoriei mulţimilor. 6. **Transpunerea** unei situaţii-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului.	**Mulţimi şi elemente de logică matematică** • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale. • Propoziţie, predicat, cuantificatori. • Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi relaţiile cu mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate, regulile lui De Morgan). • Raţionament prin reducere la absurd. • Inducţia matematică. • Probleme de numărare.
1. **Recunoaşterea** unor corespondenţe care sunt funcţii, şiruri, progresii. 2. **Utilizarea** unor modalităţi variate de descriere a funcţiilor în scopul caracterizării acestora. 3. **Descrierea** unor şiruri/funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare şi raţionamentul inductiv. 4. **Caracterizarea** unor şiruri folosind diverse reprezentări (formule, grafice) sau proprietăţi algebrice ale acestora. 5. **Analizarea** unor valori particulare în vederea determinării formei analitice a unei funcţii definite pe $\mathbb{N}$ prin raţionament de tip inductiv. 6. **Transpunerea** unor situaţii-problemă în	**FUNCŢII** **Şiruri** • Modalităţi de a defini un şir, şiruri mărginite, şiruri monotone. • Şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii. • Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.

Competenţe specifice	Conţinuturi
limbaj matematic utilizând funcţii definite pe $\mathbb{N}$.	
1. **Identificarea** valorilor unei funcţii folosind reprezentarea grafică. 2. **Caracterizarea** egalităţii a două funcţii prin utilizarea unor modalităţi variate de descriere a funcţiilor. 3. **Operarea** cu funcţii reprezentate în diferite moduri şi caracterizarea calitativă a acestor reprezentări. 4. **Caracterizarea** unor proprietăţi ale funcţiilor numerice prin utilizarea graficelor acestora şi a ecuaţiilor asociate. 5. **Deducerea** unor proprietăţi ale funcţiilor numerice prin lectură grafică. 6. **Analizarea** unor situaţii practice şi descrierea lor cu ajutorul funcţiilor.	**Funcţii; lecturi grafice** • Reper cartezian, produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan, de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbb{R}$. • Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, lecturi grafice. Egalitatea a două funcţii, imaginea şi preimaginea unei mulţimi printr-o funcţie, graficul unei funcţii, restricţii ale unei funcţii. • Funcţii numerice ($\mathscr{F} = \{f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}\}$), reprezentarea geometrică a graficului: intersecţia cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuaţii şi inecuaţii de forma $f(x) = g(x)$ ($\leq <, >, \geq$); proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie; alte proprietăţi: paritate, imparitate (simetria graficului faţă de axa Oy sau origine), simetria graficului faţă de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, periodicitate. • Compunerea funcţiilor; exemple pe funcţii numerice.
1. **Recunoaşterea** funcţiei de gradul I descrisă în moduri diferite. 2. **Utilizarea** unor metode algebrice şi grafice pentru rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor, sistemelor. 3. **Descrierea** unor proprietăţi desprinse din reprezentarea grafică a funcţiei de gradul I sau din rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi sistemelor. 4. **Exprimarea** legăturii între funcţia de gradul I şi reprezentarea ei geometrică. 5. **Interpretarea** graficului funcţiei de gradul I utilizând proprietăţile algebrice ale funcţiei. 6. **Modelarea** unor situaţii concrete prin	**Funcţia de gradul I** • Definiţie; reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$. • Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonia şi semnul funcţiei; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ (sau studierea semnului raportului $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$). • Inecuaţii de forma $ax + b \leq 0$ ($\geq, <, >$)

Competenţe specifice	Conţinuturi
utilizarea ecuaţiilor şi inecuaţiilor.	studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale. • Poziţia relativă a două drepte, sisteme de ecuaţii de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, a, b, c, m, n, p – numere reale. • Sisteme de inecuaţii de gradul I.
1. **Diferenţierea**, prin exemple, a variaţiei liniare de cea pătratică. 2. **Completarea** unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea. 3. **Aplicarea** unor algoritmi pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al II-lea prin puncte semnificative. 4. **Exprimarea** proprietăţilor unei funcţii prin condiţii algebrice sau geometrice. 5. **Utilizarea** relaţiilor lui Viète pentru caracterizarea soluţiilor şi rezolvarea unor sisteme. 6. **Utilizarea** funcţiilor în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese.	**Funcţia de gradul al II-lea** • Reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, simetria faţă de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$. • Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$, $s, p \in \mathbb{R}$.
1. **Recunoaşterea** corespondenţei dintre seturi de date şi reprezentări grafice. 2. **Determinarea** unor funcţii care verifică anumite condiţii precizate. 3. **Utilizarea** unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii şi pentru reprezentarea grafică a soluţiilor. 4. **Exprimarea** prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice. 5. **Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru determinarea sau aproximarea soluţiilor ecuaţiei asociate. 6. **Interpretarea** informaţiilor conţinute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări şi strategii de optimizare.	**Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea** • Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1)-f(x_2)$, rata creşterii/ descreşterii: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, punct de extrem (vârful parabolei). • Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox, semnul funcţiei, inecuaţii de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq$, $<$, $>$) studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini şi preimagini ale unor intervale (proiecţiile unor porţiuni de parabolă pe axe). • Poziţia relativă a unei drepte faţă de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma: $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$.

Competenţe specifice	Conţinuturi
	• Rezolvarea sistemelor de forma: $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1=y \\ a_2x^2+b_2x+c_2=y \end{cases}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in$ $\in \mathbb{R}$, interpretare geometrică.
1. **Identificarea** elementelor de geometrie vectorială în diferite contexte. 2. **Transpunerea** unor operaţii cu vectori în contexte geometrice date. 3. **Utilizarea** operaţiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică. 4. **Utilizarea** limbajului calculului vectorial pentru a descrie configuraţii geometrice. 5. **Identificarea** condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică să verifice cerinţe date. **6. Aplicarea** calculului vectorial în rezolvarea unor probleme de fizică.	**Vectori în plan** • Segment orientat, relaţia de echipolenţă, vectori, vectori coliniari. • Operaţii cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăţi ale operaţiei de adunare, înmulţirea cu scalari, proprietăţi ale înmulţirii cu scalari, condiţii de coliniaritate, descompunerea după doi vectori daţi, necoliniari şi nenuli.
1. **Descrierea** sintetică sau vectorială a proprietăţilor unor configuraţii geometrice în plan. 2. **Caracterizarea** sintetică sau/şi vectorială a unei configuraţii geometrice date. 3. **Alegerea** metodei adecvate de rezolvare a problemelor de coliniaritate, concurenţă sau paralelism. 4. **Trecerea** de la caracterizarea sintetică la cea vectorială (şi invers) într-o configuraţie geometrică dată. 5. **Interpretarea** coliniarităţii, concurenţei sau paralelismului în relaţie cu proprietăţile sintetice sau vectoriale ale unor configuraţii geometrice. 6. **Analizarea** comparativă a rezolvărilor vectorială şi sintetică ale aceleiaşi probleme.	**Coliniaritate, concurenţă, paralelism – calcul vectorial în geometria plană** • Vectorul de poziţie al unui punct. • Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiţii de paralelism). • Vectorul de poziţie al centrului de greutate al unui triunghi (concurenţa medianelor unui triunghi). • Teorema bisectoarei, vectorul de poziţie al centrului cercului înscris într-un triunghi; ortocentrul unui triunghi; relaţia lui Sylvester, concurenţa înălţimilor. • Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva.
1. **Identificarea** legăturilor între coordonate unghiulare, coordonate metrice şi coordonate carteziene pe cercul trigonometric. 2. **Calculul** unor măsuri de unghiuri şi arce utilizând relaţii trigonometrice, inclusiv folosind calculatorul. 3. **Determinarea** măsurii unor unghiuri şi	**Elemente de trigonometrie** • Cercul trigonometric, definirea funcţiilor trigonometrice: $\sin, \cos : [0; 2\pi] \to [-1, 1]$, $\mathrm{tg} : [0; \pi] \setminus \{\pi/2\} \to \mathbb{R}$; $\mathrm{ctg} : [0; \pi] \to \mathbb{R}$. • Definirea funcţiilor trigonometrice: $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$;

Competenţe specifice	Conţinuturi
a lungimii unor segmente utilizând relaţii metrice. 4. **Caracterizarea** unor configuraţii geometrice plane utilizând calculul trigonometric. 5. **Determinarea** unor proprietăţi ale funcţiilor trigonometrice prin lecturi grafice. **6. Optimizarea** calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor.	tg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, unde $D = \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \in\mathbb{Z}\}$; ctg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, unde $D = \{k\pi,\ k \in \in\mathbb{Z}\}$. • Reducerea la primul cadran, formule trigonometrice: sin $(a+b)$, sin $(a-b)$, cos$(a+b)$, cos $(a-b)$, sin $2a$, cos $2a$, sin a + sin b, sin a − sin b, cos a + cos b, cos a − cos b (transformarea sumei în produs).
1. **Identificarea** unor metode posibile în rezolvarea problemelor. 2. **Aplicarea** unor metode diverse pentru determinarea unor distanţe, a unor măsuri de unghiuri şi a unor arii. 3. **Prelucrarea** informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia. 4. **Analiza** unor configuraţii geometrice pentru optimizarea algoritmilor de rezolvare. 5. **Aplicarea** unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanţe, de măsuri de unghiuri şi de arii. 6. **Modelarea** unor configuraţii geometrice utilizând metode vectoriale sau sintetice.	**Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană** • Produsul scalar a doi vectori: definiţie, proprietăţi. Aplicaţii: teorema cosinusului, condiţii de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic. • Aplicaţii vectoriale şi trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare. • Calculul razei cercului înscris şi a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcul de arii.

Teste de evaluare inițială

Testul 1

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{20}:\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot 5-\left(-\frac{3}{5}\right)$ este:

A. $-\frac{21}{10}$ B. $-\frac{19}{10}$ C. $-\frac{31}{10}$ D. $\frac{21}{10}$

5p **2.** Soluția în $\mathbb{R}$ a ecuației $\frac{3(x-3)(x+3)-1}{3}-\frac{2x(x-2)-3(x-1)}{2}=1$ este:

A. $\frac{71}{21}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $-\frac{1}{20}$ D. 14

5p **3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5+\left(\sqrt{12}-1\right)x$. Valoarea funcției, pentru $x=2\sqrt{3}$, este:

A. 3 B. 16 C. 12 D. –8

5p **4.** După ce a cheltuit 45% din suma pe care o avea, Andrei a rămas cu 33 lei. Suma pe care a avut-o Andrei este:

A. 55 B. 65 C. 40 D. 60

5p **5.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{8}$. Intersecția dintre graficul funcției f și axa Ox este:

A. $A(0, 2)$ B. $A(0, -2)$ C. $A(2, 0)$ D. $A(4, 2)$

5p **6.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\sqrt{7}x+\sqrt{46}$. Numărul de elemente al mulțimii $\{x\in\mathbb{N}\mid f(x)\geq 0\}$ este:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 puncte)

1. Se consideră $E(x)=\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2-x}+\frac{x}{x^2-4}\right):\frac{2(x-3)}{x^2-3x-10}$.

10p a) Aflați valorile lui x real pentru care expresia nu este definită.

10p b) Arătați că $E(x)=\frac{x-5}{x-2}$.

10p c) Raționalizați numitorul fracției $E\left(\sqrt{5}\right)$.

2. Fie triunghiul ABC, în care $AB = AC$, m($\sphericalangle A$) = 30°, H este ortocentrul triunghiului și lungimea înălțimii din B este de 6 cm.

10p a) Aflați lungimea segmentului $[AC]$.

10p b) Aflați aria triunghiului ABC.

10p c) Arătați că simetricul lui H față de mijlocul lui $[BC]$ este pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Testul 2

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$ este:

A. $\frac{1}{6}$ B. 1 C. $\frac{5}{6}$ D. 2

5p **2.** Soluția ecuației $x + x + x = -x + 12$ este:

A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

5p **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x\sqrt{2}$. Valoarea funcției, pentru $x = \sqrt{2}$, este:

A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. –1

5p **4.** Calculând 30% din 50, se obține numărul:

A. 8 B. 20 C. 80 D. 15

5p **5.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este punctul:

A. $A(0, -2)$ B. $A(-1, 0)$ C. $A(1, 1)$ D. $A(0, 1)$

5p **6.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$. Soluția ecuației $f(x) = 5$ este egală cu:

A. $x = -2$ B. $x = -1$ C. $x = 0$ D. $x = 1$

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 puncte)

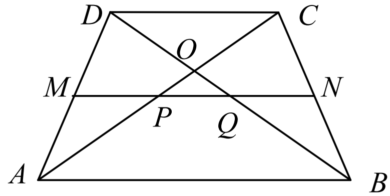
1. Se consideră $E(x) = \left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right):\frac{1}{x^2-1}-x^2+2x$.

10p a) Pentru ce valori reale ale lui x expresia dată nu are sens?

10p b) Arătați că $E(x) = 2x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

10p c) Rezolvați ecuația $E(x) = 13$.

2. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez isoscel, în care O este intersecția diagonalelor, (BD este bisectoarea unghiului ABC, MN este linie mijlocie, P și Q sunt punctele de intersecție ale lui MN cu diagonalele AC și BD, $MN = 12$ cm și $PQ =$ $= 4$ cm.



5p a) Arătați că ΔCOD este asemenea cu ΔPOQ.

5p b) Arătați că $AB = 16$ cm și $DC = 8$ cm.

5p c) Calculați lungimea laturii neparalelele AD.

5p d) Arătați că $AC = 8\sqrt{3}$ cm.

10p e) Calculați aria trapezului $ABCD$.

Testul 3

• Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{30} : \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot 5 - \left(-\frac{3}{5}\right)$ este:

A. $-\frac{16}{15}$ B. $-\frac{19}{10}$ C. $-\frac{31}{10}$ D. $\frac{21}{10}$

5p **2.** Soluția în $\mathbb{R}$ a ecuației $\frac{2(x-3)(x+3)-1}{2} - \frac{3x(x-2)-2(x-1)}{3} = 1$ este:

A. 4 B. $\frac{5}{3}$ C. $-\frac{1}{20}$ D. $\frac{67}{16}$

5p **3.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \left(\sqrt{18} - 1\right)x$. Valoarea funcției, pentru $x = 3\sqrt{2} + 1$, este:

A. 3 B. 16 C. 22 D. –8

5p **4.** După ce a cheltuit 45% din suma pe care o avea, Andrei a rămas cu 77 lei. Suma pe care a avut-o Andrei este:

A. 55 B. 140 C. 40 D. 70

5p **5.** Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{27}$. Intersecția dintre graficul funcției f și axa Ox este:

A. $A(0, 3)$ B. $A(0, -2)$ C. $A(3, 0)$ D. $A(4, 2)$

5p **6.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{7}x + \sqrt{76}$. Numărul de elemente al mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \geq 0\}$ este:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 puncte)

1. Se consideră $E(x) = \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{4-x^2}\right) : \frac{2(x-1)}{x^2-3x-10}$.

10p a) Aflați valorile lui x real pentru care expresia nu este definită.

10p b) Arătați că $E(x) = \frac{x-5}{x-2}$.

10p c) Raționalizați numitorul fracției $E\left(\sqrt{3}\right)$.

2. Fie triunghiul ABC, în care $AB = AC$, $m(\sphericalangle A) = 30°$, H este ortocentrul triunghiului și lungimea înălțimii din C este de 8 cm.

10p a) Aflați lungimea segmentului $[AB]$.

10p b) Aflați aria triunghiului ABC.

10p c) Arătați că simetricul lui H față de mijlocul lui $[CB]$ este pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Testul 4

- Pentru rezolvarea corectă a cerințelor din Partea I și Partea a II-a se acordă 90 puncte. Din oficiu – 10 puncte.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv: 50 minute.

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-1}$ este:

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{13}{27}$ C. 1 D. 2

5p **2.** Soluția ecuației $x + x + x = -x + 8$ este:

A. $x = 1$ B. $x = 0$ C. $x = -1$ D. $x = 2$

5p **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + x\sqrt{2}$. Valoarea funcției f, pentru $x = -\sqrt{2}$, este egală cu:

A. 1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. 5

5p **4.** Calculând 20% din 120, se obține numărul:

A. 20 B. 24 C. 144 D. 240

5p **5.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este punctul:

A. $A(2, 0)$ B. $A(-2, 0)$ C. $A(0, 2)$ D. $A(0, -2)$

5p **6.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Soluția ecuației $f(x) = 7$ este egală cu:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete. (60 puncte)

1. Se consideră $E(x) = \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{1}{x^2 - 4} - x^2 + 5x$.

10p a) Pentru ce x real expresia dată nu are valoarea definită?

10p b) Arătați că $E(x) = 4x + 2$, pentru orice valoare a lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

10p c) Rezolvați ecuația $E(x) = 14$.

2. Pe laturile $[AB]$ și $[BC]$ ale pătratului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile ABM, dreptunghic în B și, respectiv, BCN, dreptunghic în B. Se știe că $BM = BN > BD$.

10p a) Arătați că $\Delta MBN \sim \Delta ABC$.

10p b) Arătați că $[AM] \equiv [CN]$.

10p e) Arătați că $ACNM$ este trapez isoscel.

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulţimi şi elemente de logică matematică

Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă şi prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale.

Numerele sunt un produs al inteligenţei omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspecte cantitative ale lumii înconjurătoare şi stabileşte relaţii de ordine între ele.

Noţiunea de număr s-a perfecţionat odată cu evoluţia omului. Astfel, au rezultat următoarele mulţimi de numere: numere naturale, numere întregi, numere raţionale, numere reale.

Pornind de la mulţimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulţimi de numere.

Fundamentul acestei construcţii logice îl constituie teoria mulţimilor şi logica matematică.

1. Mulţimea numerelor naturale este:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Pe mulţimea numerelor naturale se definesc operaţiile algebrice: ***adunarea*** şi ***înmulţirea***. Aceste operaţii au următoarele proprietăţi:

1) ***comutativitatea***: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$;

2) ***asociativitatea***: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$;

3) ***existenţa elementului neutru***: $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$ (0 este element neutru pentru adunare);
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$ (1 este element neutru pentru înmulţire);

4) ***distributivitatea înmulţirii faţă de adunare***: $a(b + c) = ab + ac$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relaţia de ordine pe mulţimea numerelor naturale verifică ***principiul trihotomiei***: Două numere naturale a şi b sunt într-una şi numai într-una dintre relaţiile:

$$a < b \text{ sau } a = b \text{ sau } b < a.$$

Axioma lui Arhimede. Pentru două numere naturale oarecare a şi b, $a > 0$, există un număr natural n, astfel încât $a \cdot n > b$.

Exerciţii propuse

1. Fie $A = \left\{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 4\right\}$. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 3.

(Gheorghe Crăciun, Ploieşti)

2. Fie $A = \left\{\overline{abc} \mid \overline{abc} = a + 10b + 100c\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5?

(Nicolae Stănică, Brăila)

3. Fie $A \subset \mathbb{N}$, o mulţime având simultan proprietăţile:

i) $1 \in \mathbb{N}$; ii) Dacă $x \in A$, atunci $3x \in A$; iii) Dacă $4x + 1 \in A$, atunci $x \in A$.

Demonstraţi că $\{0, 6, 180, 182\} \subset A$. (Marin Chirciu, Piteşti)

4. Suma a 10 numere naturale distincte este 62. Demonstraţi că produsul lor se divide cu 60. (Concursul „Simon Petru”, Târgu-Mureş, 2004)

5. Pe o circumferinţă se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine, astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală cu 8.

(Olimpiada Naţională, 2005, Marin Chirciu)

6. a) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că orice număr de forma $10^{2n} - 10^{2n-1} - 10^{2n-2}$ se poate scrie sub forma $x^2 + y^2 + z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, x, y, z – distincte.

(G.M. 5/2006, Daniel Cojocaru, Slatina)

b) Dacă $a \in \{5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^{2n} - a^{2n-1} - a^{2n-2}$ se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte nenule distincte.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

7. Să se găsească cel mai mic număr nenul n, pentru care numărul 2000 divide numărul $n(n+1)(n+2)(n+3)$. (O.M. 2000, Rusia)

8. Să se găsească valoarea expresiei:

$E = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + ... - 2001! \cdot 2002 + 2001!$ (O.M. 2001, Rusia)

9. Numerele naturale p, q şi r sunt astfel încât $p + q$, $q + r$ şi $r + p$ sunt prime. Să se arate că două dintre numerele p, q, r sunt egale.

(O.M. 1996, Rusia)

10. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuaţia: $x \cdot y^{2008} + y \cdot x^{2008} = 1 + (xy)^{2007}$.

(Concursul „Mihai Eminescu”, Satu Mare, 2007, Traian Tămâian)

11. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuaţia: $xy^n + yx^n = 1 + (xy)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

12. a) Să se arate că numărul $n = 1001^{1003} + 1003^{1001}$ este divizibil cu 2004.

(G.M. 4/2007, Vasile Solovăstru, Feldru, Bistriţa-Năsăud)

b) Să se arate că $4001^{4003} + 4003^{4001}$ se divide cu 8004.

c) Fie a, număr natural impar. Demonstraţi că $a^{a+2} + (a+2)^a$ se divide cu $2(a+1)$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

2. Mulţimea numerelor întregi este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Pe mulţimea numerelor întregi se definesc operaţiile algebrice: ***adunarea*** şi ***înmulţirea***. Proprietăţile verificate de aceste operaţii în cazul numerelor naturale rămân valabile şi pentru numere întregi. În plus, la acestea se mai adaugă şi alte proprietăţi:

5) ***existenţa elementului opus***: Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există elementul $-a \in \mathbb{Z}$ (numit ***opusul lui a***), cu proprietatea:

$$a + (-a) = -a + a = 0.$$

Exerciţii propuse

1. Să se găsească toate numerele n cu proprietatea că $n^2 + 2$ este divizibil cu $n + 1$.

2. Arătaţi că, dacă suma pătratelor a două numere întregi se divide cu 7, atunci fiecare dintre aceste numere se divide cu 7.

3. Arătaţi că, pentru $k \in \mathbb{Z}$, avem $\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k \in \mathbb{Z}$.

4. Determinaţi elementele mulţimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Fie mulţimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 3}{2x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 2}{3x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătaţi că $A = B$.

6. Rezolvaţi în numere întregi sistemul: $\begin{cases} xy + z = 94 \\ x + yz = 95 \end{cases}$.

(O.M. 1994, Rusia)

7. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat. Rezolvaţi în numere întregi sistemul: $\begin{cases} xy + z = 3n + 1 \\ x + yz = 3n + 2 \end{cases}$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

8. Fie a, $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât ab şi $(a+1)(b-1)$ sunt numere consecutive. Să se arate că $ab+1$ este pătrat perfect.

(O.M. 2007, Satu Mare, Ovidiu Pop)

9. a) Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^2y^2 - 2003x = 2003$.

(G.M. 6/2007, Daniel Stretcu şi Eduard Gabriel Băzăvan, Drobeta Turnu Severin)

b) Fie p, număr prim fixat. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia:

$$x^2y^2 - (p-1)x = p.$$

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

3. Mulţimea numerelor raţionale este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Orice număr raţional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracţie ordinară (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracţie zecimală (finită sau infinită periodică).

Trecerea de la o fracţie ordinară la o fracţie zecimală

Aplicând algoritmul de împărţire a numerelor naturale, putem trece de la o fracţie ordinară $\frac{a}{b}$ la o fracţie zecimală (finită sau infinită, periodică simplă sau mixtă).

Exemple: a) $\frac{3}{5} = 0{,}6$; b) $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$; c) $\frac{7}{6} = 1{,}1666... = 1{,}1(6)$.

În cazul a) avem o fracţie zecimală ***finită***; în cazul b) avem o fracţie zecimală infinită ***periodică simplă***, cu perioada 3; în cazul c) avem o fracţie zecimală infinită ***periodică mixtă***, cu partea neperiodică 1 şi partea periodică 6.

Trecerea de la o fracţie zecimală finită sau infinită periodică la o fracţie ordinară

Exemple: a) $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; b) $0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;

c) $1{,}1(6) = 1\frac{16-1}{90} = 1\frac{15}{90} = 1\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ sau $1{,}1(6) = \frac{116-11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$.

Teoremă. O fracţie ireductibilă se transformă în fracţie zecimală periodică simplă, dacă numitorul ei descompus în factori primi nu conţine nici factorul 2, nici factorul 5.

Dacă numitorul ei conţine cel puţin unul dintre factorii 2 sau 5, dar şi factori primi diferiţi de 2 şi 5, atunci fracţia se transformă în fracţie zecimală periodică mixtă, având la partea neperiodică *m* cifre, unde *m* este cel mai mare dintre exponenţii lui 2 şi 5.

Exerciţii propuse

1. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală:

a) $x=\frac{1}{2}$; b) $x=\frac{1}{5}$; c) $x=\frac{1}{20}$; d) $x=\frac{1}{2^4\cdot 5^3}$.

2. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală infinită periodică:

a) $x=\frac{1}{3}$; b) $x=\frac{1}{7}$; c) $x=\frac{1}{6}$; d) $x=\frac{1}{3\cdot 5^2}$.

3. Pentru fracţiile zecimale periodice următoare să se găsească numărul raţional pe care îl reprezintă şi să se verifice apoi prin algoritmul de împărţire că se obţine fracţia zecimală iniţială:

a) 0,(142857); b) 0,1(6); c) − 4,14(857142).

4. Daţi exemple de numere reale care nu se pot reprezenta sub formă de fracţie zecimală periodică.

5. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se determine a_{2008}.

6. Scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{13}$ este $\overline{0,a_1a_2a_3...}$. Să se determine a_{2008}.

7. a) Să se arate că, dacă *a*, *b* $\in \mathbb{Q}$, astfel încât $a+b\sqrt{2}=0$, atunci $a=b=0$.

b) Fie *a*, *b*, *c*, *d* $\in \mathbb{Q}^*$. Demonstraţi că există $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât

$\left(a+b\sqrt{2}\right)x+\left(c+d\sqrt{2}\right)=0$ dacă şi numai dacă $ad = bc$.

8. Demonstraţi că numărul $A=\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}}$ este raţional, unde *x*, *y*, *z* sunt numere raţionale diferite două câte două.

(O.M. 2004, Arad)

9. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{11}$. Să se determine a_{2008}.

10. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{11}{13}$.

a) Determinaţi a_{2008}. b) Determinaţi suma $a_1+a_2+...+a_{2008}$.

11. Fie $\overline{1,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{16}{13}$.

a) Determinaţi a_{2008}. b) Calculaţi suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$.

12. Numerele a şi b satisfac egalitatea $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Să se găsească toate valorile posibile ale expresiei $\frac{3a-b}{a+5b}$. (O.M. 1995, Rusia)

13. Numerele a şi b satisfac egalitatea $\frac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$. Să se găsească toate valorile posibile ale expresiei $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. (O.M. 1995, Rusia)

4. Mulţimea numerelor reale

Avem incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mulţimea numerelor reale a apărut în istoria evoluţiei noţiunii de număr ca o oportunitate de rezolvare a unei ecuaţii de felul $x^2 = 2$, întrucât mulţimea numerelor raţionale nu putea să conţină soluţiile acestei ecuaţii.

Numerele reale care nu sunt raţionale de numesc ***numere iraţionale***.

Exemple: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π, … etc.

Mulţimea numerelor iraţionale este $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Un ***număr real*** x este reprezentat de o scriere de forma: $x = a_0, a_1a_2a_3...$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, iar a_1, a_2, a_3, … sunt cifre din mulţimea {0, 1, 2, …, 9}.

Pe mulţimea numerelor reale se definesc operaţiile algebrice: ***adunarea*** şi ***înmulţirea***.

Proprietăţile algebrice ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele adunării şi înmulţirii)

1) Adunarea este asociativă şi comutativă.
2) Există numărul real 0 (zero), astfel încât $0 + x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există numărul $-x \in \mathbb{R}$, astfel încât $x + (-x) = 0$.
   ($-x$ se numeşte ***opusul lui x***).
4) Înmulţirea este asociativă şi comutativă.
5) Există numărul real 1, astfel încât $1 \cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (**1 *este element neutru*** pentru înmulţire).
6) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, există numărul x^{-1} din $\mathbb{R}$, astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$.
7) Înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea, adică
   $x(y+z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Proprietăţile de ordine ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele de ordine)

8) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ este definită o relaţie de ordine, notată „$\leq$”.

Aşadar, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, $y \leq z$, atunci $x \leq z$, iar $x \leq y$, $y \leq x$, atunci $x = y$.

9) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (se mai spune că relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este ***totală***).

10) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

11) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, atunci $xz \leq yz$, pentru orice $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$.

12) Orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbb{R}$ admite un cel mai mic majorant (***axioma lui Cantor***).

Ca o consecinţă a proprietăţilor 1 – 12, se poate stabili următorul rezultat important, numit ***proprietatea*** (sau ***axioma***) lui ***Arhimede***.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un număr întreg n unic, astfel încât $n \leq x < n + 1$. Acest număr este numit ***partea întreagă*** a lui x şi este notat $[x]$.

Exemple: $[1,2] = 1$, $[1,99] = 1$, $[2] = 2$, $[-\pi] = -4$, $[-4,31] = -5$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x = [x] + \{x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă ***partea fracţionară*** a lui x.

Avem $\{x\} \in [0, 1)$.

Exemple: $\{1,2\} = 0,2$; $\{1,99\} = 0,99$; $\{2\} = 0$; $\{-\pi\} = 4 - \pi$; $\{-4,31\} = 0,69$.

Identitatea lui Hermite

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalităţile:

a) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$;

b) $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$;

c) $[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=[4x]$;

d) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţii rezolvate

1. Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{3x-1}{2}\right]+\left[\frac{3x}{2}\right]=13$.

Soluţie. Notăm $\frac{3x-1}{2}=t$. Rezultă $x=\frac{2t+1}{3}$. Ecuaţia se scrie $[t]+\left[t+\frac{1}{2}\right]=13$. Folosind identitatea lui Hermite, ecuaţia devine: $[2t] = 13 \Leftrightarrow 2t \in [13, 14) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x - 1 \in [13, 14) \Leftrightarrow 3x \in [14, 15) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{3}, 5\right)$.

2. Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}$.

Soluţie. Notând $\frac{2x-1}{3}=t$, ecuaţia devine $[t]+\left[t+\frac{1}{3}\right]+\left[t+\frac{2}{3}\right]=\frac{3t+3}{4}$. Cu identitatea lui Hermite, ecuaţia este echivalentă cu $[3t]=\frac{3t+3}{4}$. Din $3t - 1 <$ $< [3t] \le 3t$ rezultă $3t-1<\frac{3t+3}{4}\le 3t \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$, (1).

Din $[3t] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4}=k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t=\frac{4k-3}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, (2).

Din (1) şi (2) obţinem $k = 1$, de unde $t=\frac{1}{3}$ şi, în final, $x = 1$.

Proprietăţi ale părţii întregi

1) Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ avem $x \le y \Rightarrow [x] \le [y]$.

2) Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ avem $[x + y] \ge [x] + [y]$.

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $[k + x] = k + [x]$.

4) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $x - 1 < [x] \le x$.

Proprietăţi ale părţii fracţionare

1) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $0 \le \{x\} < 1$.

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $k \in \mathbb{Z}$ avem: $\{k + x\} = \{x\}$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia: $[x-1]=2$.

Soluţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{Z}$ avem $[x]=k$ dacă şi numai dacă $x \in [k, k+1)$. În cazul nostru, $[x-1]=2 \Leftrightarrow x-1 \in [1, 2) \Leftrightarrow x \in [3, 4)$.

2. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=\dfrac{x-4}{3}$.

Soluţie. Folosind faptul că $a-1<[a] \le a$, pentru $a=\dfrac{x+1}{4}$, obţinem succesiv: $\dfrac{x+1}{4}-1<\left[\dfrac{x+1}{4}\right]\le\dfrac{x+1}{4}$. Cum $\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=\dfrac{x-4}{3}$, rezultă $\dfrac{x-3}{4}<\dfrac{x-4}{3}\le\dfrac{x+1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-9<4x-16 \\ 4x-16\le 3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7 \\ x\le 19 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (7, 19], \quad (1).$$

Cum $[a] \in \mathbb{Z}$, unde $a=\dfrac{x+1}{4}$, avem $\left[\dfrac{x+1}{4}\right] \in \mathbb{Z}$. Dar $\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=\dfrac{x-4}{3}$, deci $\dfrac{x-4}{3} \in \mathbb{Z}$. Există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{x-4}{3}=k \Leftrightarrow x=3k+4$, $k \in \mathbb{Z}$, (2).

Din (1) şi (2) obţinem $3k+4 \in (7, 19] \Leftrightarrow 3k \in (3, 15] \Leftrightarrow k \in (1, 5]$. Dar $k \in \mathbb{Z}$, deci $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. Folosind (2), avem $x \in \{10, 13, 16, 19\}$. $x_1=10$, $x_2=13$, $x_3=16$ şi $x_4=19$ verifică ecuaţia. Deducem că mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S=\{10, 13, 16, 19\}$.

Exerciţii propuse

1. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $[x]=0$; b) $[x+1]=2$; c) $[x-1]=-2$; d) $[3x-2]=-4$.

2. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $[2x-1]=\dfrac{1}{3}$; b) $\left[\dfrac{4x-3}{2}\right]=x+1$; c) $\left[\dfrac{2x+3}{4-x}\right]=3x+2$.

3. Calculaţi: a) $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\left[\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)^2\right]$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculaţi:
a) $\left[\sqrt{4n^2+4n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$; c) $\left[\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Calculaţi: a) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{99}\right]$; b) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2+2n}\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{n^2-1}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Rezolvaţi ecuaţia: $[x]=1+\{x^2\}$.

7. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\left[\dfrac{2x+1}{x+2}\right]=\dfrac{3x+1}{x+3}$; (G.M. 11/2001, Liviu Pârşan)

b) $\left[\dfrac{ax+1}{x+a}\right]=\dfrac{(a+1)x+1}{x+a+1}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, a fixat. (G.M. 4/2002, Marin Chirciu)

8. Calculaţi partea întreagă a numărului A: a) $A=\sqrt{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $A=\sqrt{n^2+3n+2}$, $n \in \mathbb{N}$; c) $A=\sqrt{(n+a)(n+a+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$.

9. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $[x] \cdot \{x\} = 2008x$; b) $[x] \cdot \{x\} = a \cdot x$, unde $a \in \mathbb{N}^*$, a fixat.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

10. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $[x]+\dfrac{1}{[x]}=\{x\}+\dfrac{1}{\{x\}}$; b) $n[x]+\dfrac{1}{[x]}=n\{x\}+\dfrac{1}{\{x\}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

11. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm numărul $A_n=\sqrt{n^2+n}$.

a) Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul A_n este iraţional.

b) Aflaţi prima zecimală a numărului A_1.

c) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, prima zecimală a numărului A_n este aceeaşi.

12. Pentru $n \in \mathbb{N}$, considerăm numărul $A_n=\sqrt{n^2+11n+30}$.

a) Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul A_n este iraţional.

b) Aflaţi prima zecimală a numărului A_0.

c) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, prima zecimală a numărului A_n este aceeaşi. (O.M. 2005, Bucureşti, Cristian Magra şi Mircea Fianu)

13. a) Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, are loc identitatea:

$$\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)}\right]+1+2+...+(n-1)=n^2,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem identitatea:

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{n^2-1}\right]+1^2+2^2+...+n^2=n^3,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

c) Demonstraţi că $\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 4}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+2)}\right]+1+2+...+(n-1)=n^2$, $n\geq 1$.

d) Demonstraţi că $\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 5}\right]+...+\left[\sqrt{(2n-1)(2n+1)}\right]=n^2$, $n\geq 1$.

e) Demonstraţi că $\left[\sqrt{2\cdot 4}\right]+\left[\sqrt{4\cdot 6}\right]+\left[\sqrt{6\cdot 8}\right]+...+\left[\sqrt{2n(2n+2)}\right]=n(n+1)$, $n\geq 2$.

f) Demonstraţi că

$$\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+\left[\sqrt{13}\right]+...+\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]+1+2+3+...+(n-1)^2=n^2,$$

$n\geq 1$.

g) Demonstraţi că $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{n^2+2n}\right]=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$, $n\geq 1$.

(Dezvoltări, Marin Chirciu)

14. a) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x^2=\left([y]^2+1\right)\left(\{y\}^2+1\right)\\ y^2=\left([x]^2+1\right)\left(\{x\}^2+1\right)\end{cases}$.

(Concursul „Pitagora”, Rm. Vâlcea, 2005, Nicolae Pavelescu)

b) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x^2+y^2=2\left([z]^2+1\right)\left(\{z\}^2+1\right)\\ y^2+z^2=2\left([x]^2+1\right)\left(\{x\}^2+1\right)\\ z^2+x^2=2\left([y]^2+1\right)\left(\{y\}^2+1\right)\end{cases}$.

(O.M., Vâlcea 2006, Nicolae Pavelescu)

c) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=2\left([x_3]^2+1\right)\left(\{x_3\}^2+1\right)\\ x_2^2+x_3^2=2\left([x_4]^2+1\right)\left(\{x_4\}^2+1\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n^2+x_1^2=2\left([x_2]^2+1\right)\left(\{x_2\}^2+1\right)\end{cases}$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

15. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\dfrac{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+5}{4}\right]=1$, unde $x\in\mathbb{Z}$, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a. (Mariana Ursu)

16. a) Să se rezolve ecuaţia $\left\{\dfrac{x-1}{2}\right\}=\left\{\dfrac{x+1}{3}\right\}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului $a\in\mathbb{R}$. (G.M. 7/2007, Daniel Stretcu, Drobeta Turnu Severin)

b) Să se rezolve ecuaţia: $\left\{\dfrac{x-n}{2n}\right\}=\left\{\dfrac{x+n}{2n+1}\right\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, n fixat.

c) Să se rezolve ecuaţia $\left\{\dfrac{x-n}{m}\right\}=\left\{\dfrac{x+n}{m+1}\right\}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^*$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

Aproximări zecimale ale numerelor reale

Definiţie. Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, atunci numerele raţionale a_0; a_0, a_1; $a_0, a_1 a_2$; $a_0 a_1 a_2 a_3$ etc. se numesc ***aproximări zecimale ale numărului real x***.

Exemple: a) Fie $x = 2{,}143902\ldots$, un număr real pozitiv.

Numerele raţionale: 2; 2,1; 2,14; 2,143 etc. sunt aproximări zecimale prin lipsă ale numărului real pozitiv x.

Numerele raţionale: 3; 2,2; 2,15; 2,144 etc. sunt aproximări zecimale prin adaos ale numărului real pozitiv x.

b) Fie $y = -\,3{,}278564\ldots$, un număr real negativ.

Numerele raţionale: − 4; −3,3; − 3,28; − 3,289 etc. sunt aproximări zecimale prin lipsă ale numărului real negativ y.

Numerele raţionale: − 2; − 3,2; − 3,27; − 3, 278 etc. sunt aproximări zecimale prin adaos ale numărului real negativ y.

Definiţie. Pentru un număr real x, întregul cel mai apropiat de x reprezintă ***rotunjirea*** lui x.

Exemple: a) Fie $x = 3{,}4$; rotunjirea lui x este 3.

b) Fie $y = 3{,}6$; rotunjirea lui y este 4.

c) Fie $z = 3{,}5$; rotunjirea lui z este 4.

Ordonarea numerelor reale

Fie $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ şi $y = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, două numere reale.

Numerele reale x şi y sunt egale dacă, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, avem $a_k = b_k$.

Numărul real x este mai mic decât numărul real y şi scriem $x < y$, dacă sunt într-una dintre situaţiile:

i) $x > 0$, $y > 0$, $a_0 < b_0$ sau există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_k < b_k$ şi $a_i = b_i$, pentru orice $i < k$, $i \in \mathbb{N}$;

ii) $x < 0$ şi $y > 0$;

iii) $x < 0$, $y < 0$, $a_0 < b_0$ sau există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_k > b_k$ şi $a_i = b_i$, pentru orice $i < k$, $i \in \mathbb{N}$.

Definiţie. Dacă se dă un număr pozitiv ε, atunci se numeşte ***ε-aproximare*** (sau aproximare de ordin cel mult ε) a lui a orice număr real x, astfel încât $|x - a| < \varepsilon$.

Numărul real şi pozitiv $|x - a|$ se numeşte ***eroare absolută*** în formula aproximativă $x \simeq a$.

Exemple:

a) 3,141 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^3}$ a lui π, deoarece $|\pi - 3{,}141| < \frac{1}{10^3}$.

b) 0,33 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^2}$ a lui $\frac{1}{3}$, deoarece $\left|\frac{1}{3} - 0{,}33\right| < \frac{1}{10^2}$.

5. Modulul unui număr real

Definiţie. Valoarea absolută sau modulul numărului real x este cel mai mare dintre numerele x şi $-x$ şi se notează $|x|$.

Avem $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Exemple: a) $|2| = 2$; b) $|-2| = 2$; c) $|0| = 0$.

Proprietăţi ale modulului

1) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ şi $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$.

4) Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $a > 0$. Avem: $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$;

$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$;

$|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$;

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

5) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exerciţii propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $|x| = 2$; b) $|x - 2| = 3$; c) $|-3x + 2| = 0$;
d) $|2x - 3| = -1$; e) $|x + a| = b$, unde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuaţiile: a) $|4x - 5| = 5 - 4x$; c) $|x - 1| + |x + 1| = 0$;
d) $|x - 1| + |x - 2| = 3$; e) $|x| + |x - 1| = -1$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{(x-1)^2}=2$; b) $\sqrt{(x-2)^2}=3$; c) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=5$.

4. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $|x|<1$; b) $|x|\le 2$; c) $|x-1|>3$; d) $|x+1|\ge 3$.

5. Determinaţi mulţimile:

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid x+|x-1|=2\}$; $B=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|+|x-1|=1\}$.

6. Exprimaţi, cu ajutorul modulului, următoarele inegalităţi: a) $y-10<x<y+10$;

b) $-3<x<5$; c) $-1<x<7$; d) $x-\dfrac{1}{10}<y<x+\dfrac{1}{10}$ şi $x\ne y$.

7. a) Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ şi $|x-2|\le 1$, $|y-3|\le 2$, arătaţi că: $2\le x+y\le 8$.

b) Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ şi $|x-a|\le b$, $|y-c|\le d$, unde $a, c\in\mathbb{R}$ şi $b, d>0$, arătaţi că: $a-b+c-d\le x+y\le a+b+c+d$.

8. Arătaţi că: a) $\max(x, y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$;

b) $\min(x, y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

9. a) Care este condiţia ca o sumă de numere nenegative să fie nulă?

b) Rezolvaţi ecuaţiile:

i) $|x^2-1|+|x-1|=0$; ii) $|x^2-4|+|x+2|=0$; iii) $|x-1|+|x+2|=0$.

10. a) Să se arate că $|a|<|b|$ dacă şi numai dacă $a^2<b^2$.

b) Să se rezolve inecuaţiile:

i) $|x|<|x-1|$; ii) $|x-1|<|x+1|$; iii) $|2x-3|<|3x-2|$.

11. a) Care este produsul dintre cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii:

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid \big||x|-3\big|\le 2\}$?

12. Determinaţi $x, y\in\mathbb{Z}$, astfel încât: $y+|x-2|=3-|y-3|$.

13. a) Să se afle valorile lui $x\in\mathbb{R}$, pentru care: $|x-1|+|x-2007|\ge 2006$.

(O.M. 2007, Buzău)

b) Să se afle valorile lui $x\in\mathbb{R}$, pentru care: $|x-a|+|x-b|\ge c$, unde $a, b\in(0,\infty)$ fixate, cu $b=a+c$. (Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

6. Intervale de numere reale

Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Se pot considera ***intervalele*** **mărginite**:

$(a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ (interval ***deschis***);

$[a, b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ (interval ***închis***);

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ (interval ***semideschis***);

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ (interval ***semideschis***).

Intervalele *nemărginite* pot fi de forma:

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$;

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Operaţii cu intervale

Deoarece intervalele sunt mulţimi, toate operaţiile care se pot efectua cu mulţimi (reuniunea, intersecţia, diferenţa, produsul cartezian) se pot efectua şi cu intervale.

Exerciţiu rezolvat

Fie intervalele $I = [-3, 4]$, $J = [0, 5]$. Determinaţi: reuniunea, intersecţia, diferenţa şi produsul cartezian.

Soluţie. $I \cup J = [-3, 4] \cup [0, 5] = [-3, 5]$;

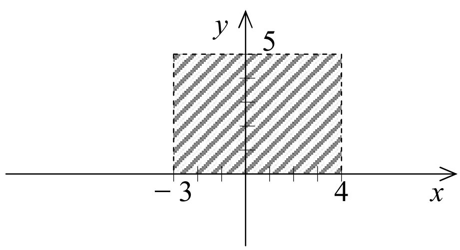
$I \cap J = [-3, 4] \cap [0, 5] = [0, 4]$;

$I - J = [-3, 4] - [0, 5] = [-3, 0]$;

$J - I = [0, 5] - [-3, 4] = [4, 5]$;

$I \times J = \{(x, y) \mid x \in I \text{ şi } y \in J\} = \{(x, y) \mid -3 \le x \le 4 \text{ şi } 0 \le y \le 5\}$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian.



COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
Adresa: IAȘI, Bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, nr. 2 -
700124 Telefon: 0763 082 213
E-mail: comenzi@ecredu.ro
Tipărit în România