ARMAND MARTINOV

●

ECUAŢII

Editor: Vasile Burlui
Corectură: Florentina Vrăbiuță
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
MARTINOV, ARMAND
Ecuații / Armand Martinov. - Iaşi : Cartea Românească Educațional, 2019
Conține bibliografie
ISBN 978-606-8982-35-9

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
Telefon: 0746 745 288
E-mail: comenzi@ecredu.ro
Adresa: Bd-ul Ştefan cel Mare şi Sfânt nr. 2, Iași – 700124

Tipărit în România

Grupul Editorial Cartea Românească

www.librariacartearomaneasca.ro/ecredu.ro

Armand Martinov

ECUAŢII

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuvânt-înainte

Cartea se adresează elevilor din clasa a VII-a până în clasa a XII-a, studenților, profesorilor de matematică şi tuturor celor interesați de a rezolva probleme frumoase, probleme dificile, probleme a căror rezolvare constituie o mare satisfacție personală.

Noțiunea de „Ecuație” este una din noțiunile cel mai des utilizate în matematică. La introducerea unei noi teme, urmează aplicațiile care vor folosi şi ecuații. Ele sunt necesare pentru înțelegerea noțiunilor şi pentru sedimentarea lor.

De asemenea, ecuațiile există şi independent de noțiunile teoretice nou introduse, pentru a scoate în evidență diferitele proprietăți.

Cartea conține o mare varietate de probleme, toate rezolvate complet, iar fiecare capitol are „Probleme rezolvate” şi „Probleme propuse”.

Problemele din carte completează ceea ce se studiază la şcoală, scoțând în evidență diferite metode de calcul, precum şi rezolvarea unor ecuații cu un grad sporit de dificultate.

Aceste probleme sunt frumoase şi atrăgătoare, având enunțuri surprinzătoare, incitante, care stimulează căutarea unor soluții cât mai elegante. Rezolvările sunt ingenioase, complete şi instructive, oferind modele de gândire logică şi creatoare, de redactare riguroasă şi ordonată şi, nu în ultimul rând, de tenacitate şi disciplină a minții.

Prof. *Armand Martinov*

Capitolul I
ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA

Probleme rezolvate

1. Se consideră ecuația:

$$2x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 6 = 0,$$

ale cărei rădăcini reale sunt x_1 şi x_2, iar m este un parametru real. Arătați că:

$$2-\sqrt{3} \le \frac{x_1}{x_2} \le 2+\sqrt{3}\ .$$

C. IONESCU-ȚIU

SOLUȚIE. Notăm $\frac{x_1}{x_2} = t$; atunci $2-\sqrt{3} \le t \le 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le t-2 \le \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |t-2| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow (t-2)^2 \le 3 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \le 0$; $t^2 - 4t + 1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 4\cdot\frac{x_1}{x_2} + 1 =$

$= \frac{1}{x_2^2}(m^2 - 3m^2 + 12m - 18) = -\frac{2}{x_2^2}(m^2 - 6m + 9) = -\frac{2}{x_2^2}(m-3)^2 \le 0$.

2. Fie ecuația:

$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 = \frac{1}{2}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Arătați că ecuația are cel puțin o rădăcină întreagă dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$.

LAURENȚIU PANAITOPOL

SOLUȚIE. Să presupunem că ecuația admite o rădăcină $x_0 \in \mathbb{Z}$. Din ecuația dată se obține $x_0^2 - (a+b)x_0 + a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{1}{2}$, de unde deducem că $x_0^2 \le 1 \Leftrightarrow x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

I. $x_0 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$;

II. $x_0 = -1 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$;

III. $x_0 = 1 \Rightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{2}$.

Prin urmare, condiția $a^2+b^2=\frac{1}{2}$ este necesară ca ecuația din enunț să aibă cel puțin o rădăcină întreagă. Condiția este şi suficientă, deoarece, dacă $a^2+b^2=\frac{1}{2}$, ecuația admite rădăcina $x_0 = 0 \in \mathbb{Z}$.

3. Fie a, $b \in \mathbb{Z}$. Rezolvați ecuația:

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x,$$

ştiind că admite o rădăcină întreagă.

MIRCEA BECHEANU

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu $(a^2+b^2)x^2-(4ab+1)x+a^2+b^2=0$ (1).
Dacă $a = b = 0$, ecuația (1) este de gradul întâi şi are unica soluție $x_1 = 0$.
Să presupunem că $a \neq 0$ sau $b \neq 0$; în acest caz, ecuația (1) este de gradul al doilea, cu rădăcinile x_1, x_2, unde $x_1 \in \mathbb{Z}$. Deoarece $x_1 = (ax_1-b)^2+(bx_1-a)^2$, deducem că $x_1 \in \mathbb{N}$. Fiindcă rădăcinile sunt reale, rezultă că $(4ab+1)^2-4(a^2+b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1-2(a-b)^2)(1+2(a+b)^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2(a-b)^2 \geq 0$ şi, deoarece $(a-b)^2 \in \mathbb{N}$, rezultă în mod necesar $(a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$. Ecuația (1) devine $2a^2x^2-(4a^2+1)x+$ $+2a^2=0$ (2) şi, conform relațiilor lui Viète, deducem $x_1+x_2=2+\frac{1}{2a^2}$, $x_1x_2=1$.
Prin urmare, $x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$. Rezultă $2+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2a^2} \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$.
Deci, $a = b = \pm 1$ şi $x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$.

4. Determinați numerele naturale a, b, c astfel încât ecuațiile:

$$x^2-ax+b=0,\ x^2-bx+c=0,\ x^2-cx+a=0$$

să aibă simultan rădăcinile întregi.

I. CUCUREZEANU

SOLUȚIE. Fie x_1, x_2; x_3, x_4; x_5, x_6 rădăcinile celor trei ecuații. Avem:
$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1x_2=b \end{cases}$; $\begin{cases} x_3+x_4=b \\ x_3x_4=c \end{cases}$; $\begin{cases} x_5+x_6=c \\ x_5x_6=a \end{cases}$. Rezultă $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6=x_1+x_2+x_3+$ $+x_4+x_5+x_6 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)+(x_5-1)(x_6-1)=3$ (1).
Deoarece x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sunt întregi, iar a, b, c sunt numere naturale, rezultă că rădăcinile sunt naturale. Excluzând cazul banal când o rădăcină este 0, rezultând toate 0, egalitatea (1) este în numere naturale şi este satisfăcută pentru $1+1+1=3$,

$3 + 0 + 0 = 3$, $0 + 3 + 0 = 3$ şi $0 + 0 + 3 = 3$. Rezultă că $(a, b, c) \in \{(4, 4, 4), (6, 8, 7), (8, 7, 6), (7, 6, 8)\}$.

5. Arătați că dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcini reale ale ecuației:

$$(m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0,$$

atunci $|x_1| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|x_2| \leq 1$.

SOLUȚIE. Ecuația are rădăcini reale pentru $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3 \geq 0$.

1) $m = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{5} \Rightarrow |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$;

2) $m > \frac{3}{4}$; rădăcinile sunt distincte şi, deoarece $x_1 x_2 = \frac{1}{m^2 + 1} > 0$, rezultă că ele au acelaşi semn.

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1$.

Să presupunem că $-1 \leq x_1 \leq 1$ şi să arătăm că $-1 \leq x_2 \leq 1$. Presupunem, prin absurd, că $x_2 < -1$. Atunci $(m^2 + 1) \cdot f(-1) < 0 \Leftrightarrow f(-1) = m^2 + 2m + 3 < 0$, fals.

Să presupunem, prin absurd, că $x_2 > 1$. Rezultă $f(1) < 0 \Leftrightarrow f(1) = m^2 - 2m + 1 \geq 0$, fals.

În concluzie, $|x_1| \leq 1 \Rightarrow |x_2| \leq 1$.

Probleme propuse

1. Rezolvați ecuația:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x}.$$

2. Arătați că, pentru orice valori ale parametrilor reali a, b, c, ecuația:

$$(a - b)x^2 + 2(b - c)x + c - a = 0$$

are soluții reale.

3. Dacă $a < b < c < d$, atunci ecuația:

$$(x - a)(x - c) + 2(x - b)(x - d) = 0$$

are rădăcini reale distincte.

4. Formați ecuația de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe $y_1 = x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ şi $y_2 = x_2^3 + \frac{1}{x_1}$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

5. Se consideră ecuația:
$$2(m+2)^2x^2 - 2(m+1)(m+2)x - m = 0.$$
Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, ecuația admite o rădăcină pozitivă subunitară.

LIVIU PÂRŞAN

6. Determinați numerele reale x, y, z care verifică ecuația:
$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 2xy + 2xz - 16z + 35 = 0.$$

7. Determinați ecuațiile cu coeficienți întregi $x^2 + ax + b = 0$ şi cu rădăcini întregi, ştiind că $a + b = 2016$.

8. Dacă $a, b, c \in 2\mathbb{Z} + 1$, atunci ecuația:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
nu are rădăcini raționale.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Arătați că, dacă ecuația:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
are rădăcini reale şi distincte x_1, x_2, atunci ecuația:
$$cy^2 + (b - 2c)y + a - b + c = 0$$
are rădăcinile reale şi distincte y_1, y_2. Calculați y_1, y_2 în funcție de x_1 şi x_2.

10. Ecuația:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
nu are rădăcini reale. Ştiind că $a + b + c < 0$, determinați semnul lui c.

11. Determinați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația:
$$x(x-1)(x-2)(x-3) = m$$
să aibă toate rădăcinile reale.

12. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $a < b < c < d$, atunci ecuația:
$$x^2 - (a + b + c + d)x + 2(ac + bd) = 0$$
are rădăcini reale.

MARCEL CHIRIȚĂ

13. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi ecuația:
$$x^2 - m(n+1)x + m + n + 1 = 0$$
are rădăcinile numere naturale, atunci $m \cdot n \leq 4$.

14. Determinați valorile întregi ale parametrului a, astfel încât ecuația:
$$(ax-2)^2 + (2x-a)^2 = 2x$$
să aibă o rădăcină întreagă. Rezolvați ecuația în acest caz.

15. Determinați $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația:

$$x^2 + px + 3p = 0$$

să admită rădăcini întregi.

16. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât ecuația:

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

să aibă rădăcini întregi.

LAURENȚIU PANAITOPOL

17. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației:

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

Arătați că x_1^3, x_2^3 sunt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)x + (ad - bc)^3 = 0.$$

18. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini întregi.

19. Fie ecuația:

$$x^2 - (m - 3)x + m^2 - m + 1 = 0.$$

a) Determinați valorile reale ale parametrului m, astfel încât ecuația să aibă cel puțin o rădăcină întreagă.

b) Există valori reale ale lui m, astfel încât ambele rădăcini să fie întregi?

20. Dacă $m \in \mathbb{R}^*$, atunci ecuația:

$$(mx - 1)^2 = 2 - x$$

are rădăcini reale. Notând x_1, x_2, cu $x_1 < x_2$, rădăcinile acestei ecuații, arătați că:

$$x_1 < 0 < x_2 \le 2.$$

21. Fie ecuația:

$$2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0, m \in \mathbb{R}.$$

În ce intervale se găsesc rădăcinile reale ale ecuației?

22. Fie ecuația:

$$ax^2 + (2a^3 - 4a^2 - 1)x - 2a(a - 2) = 0, a \in \mathbb{R}^*.$$

Determinați parametrul a, astfel încât rădăcinile ecuației să fie în afara intervalului $(-1, 1)$.

23. Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care rădăcinile ecuației:

$$mx^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$$

sunt reale distincte şi $x_1, x_2 \in (-1, 1)$.

24. Fie ecuația:

$$4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0.$$

Determinați parametrul real m, astfel încât o rădăcină a ecuației să fie strict mai mică decât 1 şi alta să fie mai mare decât 1.

25. Determinați valorile parametrului real m, astfel încât rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației:

$$4x^2 - (3m + 1)x + m - 2 = 0$$

să fie în intervalul $(0, 2)$.

26. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b < a + c$, astfel încât ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu admite rădăcini reale, atunci $5a + 2c > 3b$.

D.M. BĂTINEȚU-GIURGIU

27. Fie a, b, c numere reale, distincte două câte două şi $d \in \mathbb{R}$. Arătați că ecuațiile:

$$ax^2 + (b + d)x + c = 0,\ bx^2 + (c + d)x + a = 0,\ cx^2 + (a + d)x + b = 0$$

au soluție comună dacă şi numai dacă $a + b + c + d = 0$.

28. Se consideră patru ecuații de gradul al doilea astfel încât oricare trei să aibă o rădăcină reală comună. Arătați că cele patru ecuații au o rădăcină comună.

DOREL MIHEȚ

29. Dacă într-un triunghi lungimile laturilor a, b, c satisfac relațiile $a \geq b \geq c$, atunci ecuația:

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

are rădăcinile reale şi distincte.

30. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + ax + 1 = 0$ şi x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^2 + bx + 1 = 0$. Arătați că:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = b^2 - a^2.$$

31. Se consideră ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ şi $x^2 + cx + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, şi se notează cu x_1, x_2, respectiv x_3, x_4 rădăcinile acestor ecuații. Arătați că, dacă $x_1x_4 = x_2x_3$, atunci $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b}{d}$.

32. Rezolvați ecuația:

$$x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0.$$

33. Fie ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^*$, distincte, cu rădăcinile x_1 şi x_2. Arătați că $ax_1 + bx_2 + c = 0$ dacă şi numai dacă $\sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{ac^2} + b = 0$.

ADRIAN ATANASESCU

34. Se consideră ecuația:

$$2x^2 - 2mx + m^2 - 10m + 45 = 0.$$

Aflați mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale x_1 şi x_2 când m variază.

C. IONESCU-ȚIU

35. Determinați natura şi semnul rădăcinilor ecuației:

$$(m^2 - 4m + 3)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - (m^2 - 6m + 8) = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

Capitolul II
ECUAŢII IRAŢIONALE

Probleme rezolvate

1. Rezolvați ecuația:

$$(5x+1)\left(1+\sqrt{25x^2+10x+4}\right)+(2x+1)\left(1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)=0.$$

ARMAND MARTINOV

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu:

$$(5x+1)\left(1+\sqrt{(5x+1)^2+3}\right)+(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=0 \ \ (1).$$

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+3}\right)$ este strict crescătoare, deoarece $f'(x)=$ $=1+\sqrt{x^2+3}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}>0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, deci este injectivă. De asemenea, funcția f este impară $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Ecuația (1) devine $f(5x+1)+f(2x+1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(5x+1)=-f(2x+1)\Leftrightarrow f(5x+1)=f(-2x-1)$. Funcția, fiind injectivă, rezultă $5x+1=-2x-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{7}$.

2. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{1+ax}=x+\sqrt{1-ax},\ a\in\mathbb{R}.$$

SOLUȚIE. Pentru $a=0$, ecuația admite numai soluția $x=0$. Pentru $a<0$, ecuația are sens dacă $x\in\left[\dfrac{1}{a},-\dfrac{1}{a}\right]$, iar pentru $a>0$, ecuația are sens dacă $x\in\left[-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right]$. Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x\Leftrightarrow\dfrac{2ax}{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1-ax}}=x$, cu $x=0$, $\forall\ a\in\mathbb{R}$. Pentru $x\neq0$, ecuația devine $\sqrt{1+ax}+\sqrt{1-ax}=2a$, $a>0$. Rezultă că $\sqrt{1-a^2x^2}=2a^2-1$. Din $2a^2-1\geq0$ și $a>0$ rezultă $a\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$. Apoi se obține $x^2=4(1-a^2)$. Din $1-a^2>0$ și $a\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă că $a\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. Se obțin soluțiile

$x = \pm 2\sqrt{1-a^2}$, care sunt situate în intervalul $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$, cu $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

3. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-x^2}\ .$$

SOLUȚIE. Există $\alpha \in [0, \pi]$ astfel încât $x = \cos\alpha$. Ecuația devine:

$\sqrt{1+\sin\alpha}\left(\sqrt{(1+\cos\alpha)^3} - \sqrt{(1-\cos\alpha)^3}\right) = 2 + \sin\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) 2\sqrt{2}\left(\cos^3\frac{\alpha}{2} - \sin^3\frac{\alpha}{2}\right) = 2 + \sin\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2 + \sin\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\alpha(2+\sin\alpha) = 2 + \sin\alpha \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\alpha = 1$, deoarece $2 + \sin\alpha \neq 0$. Rezultă $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{5(x^2+2yz)} + \sqrt{6(y^2+2zx)} + \sqrt{5(z^2+2xy)} = 4(x+y+z)\ .$$

SOLUȚIE. Condiții: $x + y + z \geq 0$; $x^2 + 2yz \geq 0$; $y^2 + 2zx \geq 0$; $z^2 + 2xy \geq 0$. Folosind inegalitatea Cauchy–Buniakowski, se obține $\sqrt{5}\sqrt{x^2+2yz} + \sqrt{6}\sqrt{y^2+2zx} +$
$+ \sqrt{5}\sqrt{z^2+2xy} \leq \sqrt{(5+6+5)(x^2+2yz+y^2+2zx+z^2+2xy)} = 4(x+y+z)$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $\frac{x^2+2yz}{5} = \frac{y^2+2zx}{6} = \frac{z^2+2xy}{5}$. De aici avem $x^2 - z^2 = 2y(x-z)$.

I. $x = z$; rezultă $\frac{x^2+2xy}{5} = \frac{y^2+2x^2}{6} \Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 5y^2 = 0$

1) $y = 2x \Rightarrow x = \alpha,\ y = 2\alpha,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$;

2) $y = \frac{2x}{5} \Rightarrow x = \alpha,\ y = \frac{2\alpha}{5},\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

II. $x + z = 2y$; rezultă $\frac{x^2+2y(2y-x)}{5} = \frac{y^2+2x(2y-x)}{6} \Leftrightarrow 16x^2 - 32xy + 19y^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (4x-4y)^2 + 3y^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

Rezultă $(x, y, z) \in \left\{(\alpha, 2\alpha, \alpha), \left(\alpha, \frac{2\alpha}{5}, \alpha\right), (0, 0, 0)\right\}$, $\alpha \geq 0$.

5. Rezolvaţi şi discutaţi ecuaţia:

$$\frac{\sqrt[n]{a-x}+\sqrt[n]{x-b}}{\sqrt[n]{a-x}}=\frac{3\sqrt[n]{a-x}-\sqrt[n]{x-b}}{\sqrt[n]{x-b}},\ a, b, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

SOLUȚIE. Condiţii: $x \neq a$, $x \neq b$. Ecuaţia este echivalentă cu $1+\sqrt[n]{\frac{x-b}{a-x}}=3\sqrt[n]{\frac{a-x}{x-b}}-1$.

Notând $\sqrt[n]{\frac{x-b}{a-x}}=y$ se obține $1+y=\frac{3}{y}-1 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0$, de unde $y_1=-3$, $y_2=1$.

I. n impar; $\sqrt[n]{\frac{x-b}{a-x}}=-3 \Leftrightarrow \frac{x-b}{a-x}=-3^n \Rightarrow x=\frac{3^n \cdot a-b}{3^n-1}$;

$\frac{3^n \cdot a-b}{3^n-1} \neq a \Rightarrow a \neq b$; $\frac{3^n \cdot a-b}{3^n-1} \neq b \Rightarrow a \neq b$.

$\sqrt[n]{\frac{x-b}{a-x}}=1 \Leftrightarrow x-b=a-x \Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+b}{2} \neq a \Rightarrow a \neq b$; $\frac{a+b}{2} \neq b \Rightarrow a \neq b$.

Deci, pentru n impar şi $a \neq b \Rightarrow x_1=\frac{3^n \cdot a-b}{3^n-1}$, $x_2=\frac{a+b}{2}$. Pentru $a = b$, ecuaţia devine $\frac{\sqrt[n]{a-x}+\sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{a-x}}=\frac{3\sqrt[n]{a-x}-\sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{x-a}} \Leftrightarrow 0=\frac{-4\sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{x-a}} \Rightarrow 0=-4$, fals. Deci, pentru $a = b$, ecuaţia este imposibilă.

II. n par; $a - x > 0$ şi $x - b > 0 \Leftrightarrow b < x < a$. În acest caz convine doar $y = 1$. Rezultă $\sqrt[n]{\frac{x-b}{a-x}}=1 \Leftrightarrow \frac{x-b}{a-x}=1 \Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$; $b<\frac{a+b}{2}<a \Leftrightarrow b<a$. Deci, pentru n par soluția este $x=\frac{a+b}{2}$ şi $b < a$. Dacă $b \geq a$, ecuația este imposibilă.

Probleme propuse

1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0.$$

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4.$$

3. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2}=6\sqrt{x}\ .$$

4. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x\text{, unde } a\in\mathbb{R}.$$

5. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^2-7\sqrt{x^2-2x-6}-2=2(x-1)\ .$$

6. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{12x^3-35x^2+6x+31}=x^2+1\ .$$

7. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{125x^2+2x+9}=2x^2+x+5\ .$$

8. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{22x^2+6x+\frac{1}{3}}=18x^2+4x+\frac{1}{3}\ .$$

9. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{6x^2-3x+1}=2x^2-x+1\ .$$

10. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{5x^2+8x+2}=2x^2+3x+1\ .$$

11. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{19x^2+8x+\frac{2}{3}}=15x^2+6x+\frac{2}{3}\ .$$

12. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{-8x^4+115x^2+72x-17}=4x^2+5x\ .$$

13. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2x-3}=2\sqrt[4]{x^2-2x+1}\ .$$

14. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\ .$$

15. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

16. Rezolvați ecuația:

$$x=-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-x}.$$

17. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{mx^2-x+1}+\sqrt{mx^2+x+1}=x,\ m\in\mathbb{R}.$$

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{17-(x-3)^2}-\sqrt{9x^2+25x+16}=\sqrt{x+2}.$$

ARTUR BĂLĂUCĂ

19. Rezolvați ecuația:

$$3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14.$$

M.E. PANAITOPOL

20. Rezolvați ecuația:

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=28.$$

21. Rezolvați ecuația:

$$2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48.$$

22. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+14}+\sqrt{x+23}=12.$$

23. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}.$$

24. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=x.$$

25. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

26. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(3x+10)^{-\frac{1}{2}}+6(x+2)^{-\frac{1}{2}}(3x+10)^{-\frac{1}{2}}=(x+2)^{-\frac{1}{2}}.$$

27. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{3}{\sqrt{x-1}}=0.$$

28. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

CRISTIAN MIU

29. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x}{15}}.$$

30. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}.$$

31. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{10x^2+21x+1}=3x^2+7x+\frac{13}{12}.$$

32. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x\sqrt{1-x^2}-y\sqrt{1-y^2}=1.$$

33. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{4x-y^2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{4x^2+y}.$$

34. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{6x-y^2-4z+1}-\sqrt{y+4z^2}=\sqrt{9x^2+y+4}.$$

35. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}=\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 4x}+\sqrt{\cos 5x},\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{10}\right].$$

36. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt[3]{8a^3+x}+\sqrt[3]{8a^3+12a-x}=4a, \text{ unde } a\in\mathbb{R}^*.$$

37. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația:

$$\sqrt[3]{3x^2-11}+\sqrt{2x-3}+4=x^2+x+a^2$$

are rădăcini reale şi apoi rezolvați ecuația obținută.

DAN SECLĂMAN

38. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{129-\sqrt{x+14}}+\sqrt[3]{60+\sqrt{x+14}}=9 .$$

39. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3 .$$

40. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{4x+7}=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{2x+3} .$$

LIVIU PÂRŞAN

41. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{2x-6}+\sqrt{x+10}=1 .$$

D. SĂVULESCU

42. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3 .$$

43. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt{9+x}=8 .$$

44. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{x^4+7x^3}=\sqrt{x^4+8x}-x^2 .$$

45. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{3-x}=4 .$$

46. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[4]{x(a-x)^3}+\sqrt[4]{x^3(a-x)}=a ,\ a>0.$$

47. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1 .$$

48. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2+1}}-\sqrt[5]{x-\sqrt{x^2+1}}=2 .$$

49. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[6]{x^2+6x-7,5}+\sqrt[6]{8,5-6x-x^2}=1.$$

50. Rezolvați ecuația:

$$x^3\sqrt[6]{x^5}-4x^2\sqrt[12]{x}-5\sqrt[3]{x}=0.$$

51. Rezolvați ecuația:

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b},\ a,\ b\in\mathbb{N}^*.$$

52. Rezolvați ecuația:

$$3+\sqrt[x+1]{7x+4}=\sqrt[\sqrt{x^2-5x+8}]{6x+1}.$$

53. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+3\sqrt{x_3-3^2}+\ldots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n).$$

Capitolul III
ECUAŢII DE GRAD SUPERIOR

Probleme rezolvate

1. Arătați că ecuația:

$$ax^3 - 3bx^2 - 3ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R}^*,$$

are toate rădăcinile reale.

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu $x^3 - 3\frac{b}{a}x^2 - 3x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ (1). Cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă că există $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x = \operatorname{tg} y$. Aşadar, relația (1) devine $\frac{b}{a} = \frac{3\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}^3 y}{1 - 3\operatorname{tg}^2 y} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \operatorname{tg} 3y \Rightarrow y_k = \frac{\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Rezultă că ecuația are rădăcinile $x_k = \operatorname{tg} y_k$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

2. Arătați că ecuația:

$$x^3 - 3x^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} - 3x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0$$

admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$.

SOLUȚIE. Folosind formula $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$ se obține $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} 3\cdot\frac{\pi}{36} = \frac{3\operatorname{tg}\frac{\pi}{36} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{36}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{36}} = \frac{3x_1 - x_1^3}{1 - x_1^2}$. Ecuația se scrie $x^3 - 3\cdot\frac{3x_1 - x_1^3}{1 - x_1^2}x^2 - 3x + \frac{3x_1 - x_1^3}{1 - x_1^2} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(1 - 3x_1^2\right)x^3 - 3\left(3x_1 - 3x_1^3\right)x^2 - 3x\left(1 - 3x_1^2\right) + 3x_1 - x_1^3 = 0$. Înlocuind $x = x_1 \Rightarrow 0 = 0$.

3. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x-7}{x-5} - \frac{x-8}{x-4} + \frac{x-9}{x-3} - \frac{x-10}{x-2} = x - 6.$$

SOLUȚIE. Condiții: $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 4$, $x \neq 5$. Notând $x - 6 = t$, ecuația devine $\frac{t-1}{t+1} - \frac{t-2}{t+2} + \frac{t-3}{t+3} - \frac{t-4}{t+4} = 4 \Leftrightarrow \frac{2t}{(t+1)(t+2)} + \frac{2t}{(t+3)(t+4)} = t$ (1) $\Rightarrow t = 0 \Rightarrow x_1 = 6$.

Ecuația (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{(t+1)(t+2)} + \frac{1}{(t+3)(t+4)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2+5t+7}{(t^2+5t+4)(t^2+5t+6)} = \frac{1}{4}$ (2).

Notând $t^2 + 5t + 4 = y$, ecuația (2) devine $\frac{y+3}{y(y+2)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y^2 - 2y - 12 = 0 \Rightarrow y =$

$= 1 \pm \sqrt{13}$. Rezultă $t^2 + 5t + 4 = 1 \pm \sqrt{13} \Leftrightarrow t^2 + 5t + 3 \pm \sqrt{13} = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{13 \pm 4\sqrt{13}}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 = \frac{7 \pm \sqrt{13 \pm 4\sqrt{13}}}{2}$.

4. Rezolvați ecuația:

$$ab(a^2 - b^2)(x^2 + c^2)^2 - cx(x^2 - c^2)(a^2 + b^2)^2 = 0.$$

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu $ab(a^2 - b^2)\left(\frac{x}{c} + \frac{c}{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{c} - \frac{c}{x}\right)(a^2 + b^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab(a^2 - b^2)\left(\frac{x^2}{c^2} + \frac{c^2}{x^2} + 2\right) - \left(\frac{x}{c} - \frac{c}{x}\right)(a^2 + b^2)^2 = 0$ (1). Notând $\frac{x}{c} - \frac{c}{x} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{c^2} + \frac{c^2}{x^2} = y^2 + 2$; ecuația (1) devine $ab(a^2 - b^2)y^2 - (a^2 + b^2)^2 y + 4ab(a^2 - b^2) = 0$.

$\Delta = (a^2 + b^2)^4 - 16a^2b^2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - 2ab - b^2)(-a^2 - 2ab + b^2) = (4a^2b^2 - (a^2 - b^2)^2$.

Rezultă $y_1 = \frac{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 + (a^2-b^2)^2}{2ab(a^2-b^2)} = \frac{a^2-b^2}{ab}$;

$y_2 = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 - (a^2-b^2)^2}{2ab(a^2-b^2)} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

I. $\frac{x}{c} - \frac{c}{x} = \frac{a^2-b^2}{ab} \Leftrightarrow abx^2 - (a^2-b^2)cx - abc^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{bc}{a},\ x_2 = \frac{ac}{b}$.

II. $\frac{x}{c} - \frac{c}{x} = \frac{4ab}{a^2-b^2} \Leftrightarrow (a^2-b^2)x^2 - 4abcx - (a^2-b^2)c^2 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{(a-b)c}{a+b}$,

$x_4 = \frac{(a+b)c}{a-b}$.

5. Fie ecuația:

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0,$$

cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Calculați:

$$\frac{1}{(x_1-1)^2} + \frac{1}{(x_2-1)^2} + \frac{1}{(x_3-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_n-1)^2}.$$

SOLUȚIE. Observăm că ecuația nu admite rădăcina $x = 1$.
Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Remarcăm că:
$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ avem
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}$. Derivând, obținem:

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = \frac{-1}{(x - x_1)^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} + \frac{-1}{(x - x_3)^2} + \ldots + \frac{-1}{(x - x_n)^2}.$$

Pentru $x = 1$ obținem:

$$\frac{-f''(1) \cdot f(1) + (f'(1))^2}{(f(1))^2} = \frac{1}{(1 - x_1)^2} + \frac{1}{(1 - x_2)^2} + \frac{1}{(1 - x_3)^2} + \ldots + \frac{1}{(1 - x_n)^2}.$$

Dar $f(1) = n + 1$. Avem $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1) = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$;

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + (n-2)(n-3)x^{n-4} + \ldots + 6x + 2$;

$$f''(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

Rezultă $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k - 1)^2} = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)^2}{3}}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{4} - \frac{n(n-1)}{3} = \frac{n(4-n)}{12}.$$

Probleme propuse

1. Rezolvați ecuația:

$$x^3 - 4\sqrt{3}x^2 + 3x + 18\sqrt{3} = 0.$$

2. Rezolvați ecuația:

$$7x^3 + (12\sqrt{2} - 3)x^2 + 9x + 2\sqrt{2} - 1 = 0.$$

3. Rezolvați ecuația:

$$4x^3 - 30x^2 + 52x + 9 = 0.$$

4. Se dă ecuația:

$$2x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 4a + 11)x + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Găsiți o relație între rădăcini independentă de a și b.
b) Arătați că, dacă rădăcinile sunt reale, atunci se găsesc în intervalul [1, 3].

5. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x+a}{a}+\frac{x+b}{b}=\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b},$$

unde a şi b sunt numere reale nenule.

6. Rezolvaţi ecuaţia ale cărei rădăcini verifică relaţia:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+\frac{4}{9}-$$
$$-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8+x_8)=0.$$

7. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1}{ax+b-c}+\frac{1}{-a+bx+c}+\frac{1}{a-b+cx}=\frac{1}{(a+b+c)x},$$

pentru $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$.

8. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$. Calculaţi, pentru $n \in \mathbb{Z}$, suma:

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n.$$

9. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ şi apoi rezolvaţi ecuaţia:

$$2x^3 + x^2 - 13x + m = 0,$$

ştiind că $x_1 \cdot x_2 = 1$.

10. Rezolvaţi ecuaţia:

$$4(m + 1)x^3 + (m - 3)x - m + 1 = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină independentă de m.

11. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^3 - (2 - 3i)x^2 - (1 + 4i)x + 2 + i = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină reală.

12. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x}{x^2+2}+\frac{12x}{x^2-12x+2}=-1.$$

13. Fie ecuaţia:

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Arătaţi că, dacă $x_1 < x_2 < x_3$, atunci $x_2^2 - x_1 = 2$.

14. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^3 - ax^2 + bx + a = 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$

ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=a^3$.

15. Arătați că, dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației:

$$x^3 - x + 1 = 0,$$

atunci expresia $E = \dfrac{x_1\left(1 - x_1^2 + x_3\right)}{x_2^2}$ este constantă.

16. Rezolvați ecuația cu coeficienți reali:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

dacă $b^2 = 3ac$.

17. Fie ecuația:

$$x^3 - 7x\cos^2\alpha + 6\cos 2\alpha = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Rezolvați şi determinați parametrul α, ştiind că o rădăcină este dublul alteia.

18. Fie ecuația:

$$x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

Găsiți relația dintre p şi q, astfel încât două rădăcini ale ecuație să fie $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$.

19. Rezolvați ecuația:

$$x^3 + x^2(\cos^2\alpha - 2) - x\sin^2\alpha + 2 - 3\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 0.$$

20. Arătați că, dacă ecuația:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,\ a, b, c \in [0, \infty)$$

are toate rădăcinile x_1, x_2, x_3 reale, atunci $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

21. Arătați că rădăcinile ecuației:

$$x^3 + ax^2 + (a + 1)x + a = 0,$$

unde $a > 0$, au partea reală negativă. Arătați că rădăcinile complexe ale ecuației au modulul mai mare decât 1.

22. Rezolvați ecuația:

$$(x + a)(x + a + 1)(x + a + 2)(x + a + 3) - (x + b)(x + b + 1)(x + b + 2)(x + b + 3) = 0,$$

$a, b \in \mathbb{R}$.

23. Fie α o rădăcină a ecuației:

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

Determinați ecuația cu coeficienții întregi care admite pe α^6 ca rădăcină.

24. Fie ecuația:

$$x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R},\ q \neq 0.$$

Aflați perechea (p, q), ştiind că $x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$ şi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -\frac{3}{2}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației.

25. Dacă u este o rădăcină reală a ecuației:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

unde $a \neq 0$ şi $d \neq 0$, arătați că, dacă $\Delta_1 = b^2 - 4ac < 0$ şi $\Delta_2 = c^2 - 4bd < 0$, atunci u este situat între $\frac{4ad}{\Delta_1}$ şi $\frac{\Delta_2}{4ad}$.

BORISLAV MIHAILOV

26. Rezolvați ecuația:

$$6x^3 + 29x^2 + 10x - 24 = 0.$$

ARMAND MARTINOV

27. Rezolvați în numere întregi ecuația:

$$x^3 - 2y^3 + 3xy - 4x + 5y - 7 = 0.$$

ARMAND MARTINOV

28. Determinați a şi rezolvați ecuația:

$$3x^3 - 7x^2 + a = 0,$$

ştiind că $x_1 - x_2 = 1$.

29. Se consideră ecuația:

$$x^3 + px + q = 0,$$

unde $p, q \in \mathbb{C}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Calculați în funcție de p şi q produsul:

$$P = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

30. Fie ecuația:

$$x^3 - ax^2 + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Dacă $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, atunci arătați că:

$$\sqrt{a - x_1} = \sqrt{a - x_2} + \sqrt{a - x_3}\ .$$

31. Rezolvați ecuația:

$$x^3 + [x] = 3,$$

unde $[a]$ este partea întreagă a lui a.

32. Rezolvați în numere naturale prime ecuația:

$$(x - y)^3 = x + y.$$

33. Rezolvați ecuația:

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3\,,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}.$$

34. Rezolvați ecuația:

$$(x+2a-3b)^3+(2x-3a+b)^3=(3x-a-2b)^3,$$ a şi b fiind numere reale.

LIVIU PÂRŞAN

35. Rezolvați ecuația:

$$(x+3)^4+(x+5)^4=2.$$

36. Rezolvați ecuația:

$$(x+1)^2+(x+2)^3+(x+3)^4=2.$$

37. Rezolvați ecuația:

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0.$$

38. Rezolvați ecuația:

$$2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$$

39. Rezolvați ecuația:

$$16x^4-24x^3+2x^2+24x-9=0.$$

40. Rezolvați ecuația:

$$4x^4+12x^3+5x^2-6x-15=0.$$

41. Rezolvați ecuația:

$$35x^4-2x^3-77x^2-4x+32=0.$$

42. Rezolvați ecuația:

$$32x^4-48x^3-10x^2+21x+5=0.$$

43. Rezolvați ecuația:

$$\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-4}=4\,.$$

44. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x-7}{x-5}-\frac{x-8}{x-4}+\frac{x-9}{x-3}-\frac{x-10}{x-2}=x-6\,.$$

45. Determinați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația:

$$x^4-2mx^3+(m^2+m-1)x^2-2mx+1=0$$

să aibă toate rădăcinile reale.

46. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$$

şi determinaţi parametrii a şi b, ştiind că toate rădăcinile sunt negative.

GH. CIORĂSCU

47. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\left(\frac{2x^2 + x + 5}{x}\right)^2 - 2x = \frac{5}{x} + 57 .$$

48. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + px^3 + 12x^2 + qx + 9 = 0,\ p,\ q \in \mathbb{R},$$

astfel ca între rădăcinile sale să existe relaţia $x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = x_2x_3x_4$.

49. Determinaţi parametrul α pentru care rădăcinile ecuaţiei:

$$x^4 + x^3 \cos\alpha + x^2 + x \sin\alpha + 1 = 0$$

satisfac relaţia $\dfrac{x_1}{x_1 + x_4} = \dfrac{x_2}{x_2 + x_3}$.

50. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 - 2(m - 1)x^3 + (m^2 - 5m - 7)x^2 + (3m^2 + 11m + 4)x - 4m^2 - 4m = 0,$$

dacă are rădăcini independente de m.

51. Fie ecuaţia:

$$x^4 + (2a + 1)x^3 + 2(a + 1)^2x^2 + bx + c = 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \geq 0.$$

Arătaţi că această ecuaţie admite cel mult două rădăcini reale.

52. Arătaţi că ecuaţia:

$$x^4 + ax^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

unde a, b, $c \in \mathbb{R}$ şi $a \in \left(0, \dfrac{8}{3}\right)$, nu are toate rădăcinile reale.

53. Se dă ecuaţia:

$$x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx + 225 = 0.$$

Rezolvaţi ecuaţia şi determinaţi valorile coeficienţilor a şi b, ştiind că aceasta are rădăcini raţionale duble.

54. Fie ecuaţia:

$$x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Arătaţi că, pentru $|a| < 1$, toate rădăcinile au modulul egal cu 1.

55. Rezolvați ecuația:

$$x^2+\frac{x^2}{(2x-1)^2}=\frac{35}{4}.$$

56. Rezolvați ecuația:

$$x^2=(3-x^2)(4x-1)^2.$$

57. Rezolvați ecuația:

$$x^2(x-2)^2+4x^2-32(x-2)^2=0.$$

58. Rezolvați ecuația:

$$(2x^2+5x-4)^2+10(x^2+2x-1)^2=7(2x^2+5x-4)(x^2+2x-1).$$

59. Rezolvați ecuația:

$$(x^2+3x-1)^2+8(x^2+5x-6)^2=6(x^2+3x-1)(x^2+5x-6).$$

60. Rezolvați ecuația:

$$3(x^2-x+9)^2-2(x^2+x+9)^2=x^2.$$

61. Rezolvați ecuația:

$$(x^2-3x-5)^2+x^3-15x^2-5x=0.$$

62. Rezolvați ecuația:

$$(x^2-3x-18)(x^2-5x-50)=7x^2.$$

63. Rezolvați ecuația:

$$(5x^2+3x-7)^2=x(5x^2+15x-7).$$

64. Determinați ecuația cu coeficienți întregi de grad minim care admite rădăcina $x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

65. Rezolvați ecuația:

$$x^4+x^3-2x^2+15x-25=0.$$

66. Rezolvați ecuația:

$$x^4-10x^2-8x+5=0.$$

67. Rezolvați ecuația:

$$(4x^2+3x-1)^2-5x^2(x^2+3x-1)-9x^4=0.$$

68. Rezolvați ecuația:

$$(5+13x-x^2)(5-13x+x^2)=24(13x-x^2).$$

69. Rezolvați ecuația:

$$(9x^2 - 12x - 23)(6x^2 - 8x - 13) = 5.$$

70. Rezolvați ecuația:

$$(2x - 1)(2x - 5)(3x - 1)(3x - 8) + 1 = 0.$$

71. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - 5x - 17)^2 + x^3 - 17x^2 - 17x = 0.$$

72. Rezolvați ecuația:

$$x^4 + 18x^3 + 76x^2 - 45x + 6 = 0.$$

73. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 10) - 9|x^2 - 7x + 5| + 45 = 0.$$

74. Rezolvați ecuația:

$$(x + 1)(x + 3)(x - 5)(x - 15) = 28x^2.$$

75. Rezolvați ecuația:

$$(2x^2 + x - 4)(3x^2 + x - 6) = x^2.$$

76. Rezolvați ecuația:

$$(3x^2 - 2a)^2 - 25x^4 + 20x^3 + 18x^2 - 4x - 8a + 3 = 0.$$

77. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - x + 1)^2 + 8(x + 1)^2 = 6(x^3 + 1).$$

78. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 + 9x + 20)^2 - 5(x^2 + 3x - 10)(x^2 + x - 12) + 6(x^2 - 5x + 6)^2 = 0.$$

79. Rezolvați ecuația:

$$(27x^2 - 60x - 32)(2x^2 - 5x - 3) = 3x^2.$$

80. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - 10x)(x^2 - 10x + 8) - 9|x^2 - 10x + 4| + 36 = 0.$$

ARMAND MARTINOV

81. Rezolvați ecuația:

$$(x-2)^2 + \frac{15}{x^2 - 4x} = 6\,.$$

ARMAND MARTINOV

82. Rezolvați ecuația:

$$(3x^2 + x - 9)(8x^2 + 3x - 24) = 3x^2.$$

83. Rezolvaţi ecuaţia:

$$5x^4 - 12x^3 - 1 = 0.$$

84. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 5 = 0.$$

85. Rezolvaţi ecuaţia:

$$80x^4 + 12x^3 - 54x^2 + 108x - 81 = 0.$$

86. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^2 = (2x - 1)^2(12 - x^2).$$

87. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 8x^3 - 52x + 35 = 0.$$

88. Rezolvaţi ecuaţia:

$$16x^4 + 96x^3 - 513x^2 + 65 = 0.$$

89. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 15 = 0.$$

90. Rezolvaţi ecuaţia:

$$9x^4 - 6x^3 - 61x^2 + 42x - 7 = 0.$$

91. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

92. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) = (x + 2)^2 + (x + 4)^2 + (x + 6)^2 + (x + 8)^2 - 11.$$

93. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1+x^4}{(1+x)^4} = \frac{1}{2}.$$

94. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$x = a - b(a - bx^2)^2,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

95. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0,$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

96. Determinați p şi rezolvați ecuația:

$$3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0,$$

ştiind că produsul a două rădăcini este 2.

97. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Rezolvați ecuația:

$$x^4 - ax^3 + bdx^2 - cx + d = 0,$$

ştiind că rădăcinile sunt numere naturale distincte.

98. Fie ecuația:

$$x^4 + ax^3 + ax^2 + ax + a = 0,\ a \in \mathbb{C},$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Arătați că $\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3\right)^4 = \left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4\right)^3$.

LIVIU PÂRŞAN

99. Rezolvați ecuația:

$$\left(\frac{x+5}{x+4}\right)^2 + \left(\frac{x+5}{x+6}\right)^2 = 12.$$

100. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = (a - b)^4,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

101. Arătați că ecuația:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 2017 = 0$$

nu are soluție în $\mathbb{Z}$.

102. Rezolvați ecuația cu coeficienți reali:

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ştiind că are toate rădăcinile reale.

103. Arătați că ecuația:

$$x^2 + y^3 + z^4 + t^6 = u^7$$

are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale nenule şi distincte.

104. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - m)^2 = m - x,\ m \in \mathbb{R}.$$

105. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$(x^2 - m)^2 - 6x^2 + 4x + 2m = 0,$$

unde m este un parametru real.

106. Rezolvați ecuația:

$$(x+2)^5 - x^5 = 2.$$

107. Rezolvați ecuația cu coeficienți reali:

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că are toate rădăcinile reale.

108. Rezolvați ecuația:

$$x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0,$$

ştiind că admite o rădăcină triplă şi una dublă.

109. Rezolvați ecuația:

$$(x-1)^6 + 6x(x-1)^4 - 32x^3 = 0.$$

110. Rezolvați ecuația:

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) + 30 = 0.$$

111. Rezolvați ecuația:

$$(6x^2 + 12x - 1)^2(x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 6x + 2) + 12 = 0.$$

112. Rezolvați ecuația:

$$(3x^2 - 4x + 1)^3 + (x^2 + 4x - 5)^3 = 64(x^2 - 1)^3.$$

113. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)(x-11) = -225.$$

114. Rezolvați ecuația:

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0.$$

115. Rezolvați ecuația:

$$x^8 + x^4 + 1 = 0.$$

116. Rezolvați ecuația:

$$x^8 - 10x^6 - 16x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 10x^2 + 1 = 0.$$

117. Determinați patru rădăcini ale ecuației:

$$(1-x)^{11} + (1+x)^{11} = 2^{11}.$$

118. Rezolvați ecuația:

$$xC_n^0 + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n = 0.$$

119. Rezolvați ecuația:

$$(x + i)^n + (x - i)^n = 0$$

şi arătați că are toate rădăcinile reale.

120. Rezolvați ecuația:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

121. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, rezolvați în numere naturale ecuația:

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + x^n + y^n + z^n = x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2} + x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}.$$

Capitolul IV
ECUAŢII EXPONENŢIALE ŞI LOGARITMICE

Probleme rezolvate

1. Rezolvați ecuația:

$$3^{x^3-1}+3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+3^{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-1}=7.$$

PATRICK POPESCU-PAMPU

SOLUȚIE. Condiție: $x > 0$. Folosind inegalitatea mediilor se obține:

$$7=3^{x^3-1}+3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+3^{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-1}=3^{x^3-1}+3^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}+3^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}+3^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}+3^{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2}+3^{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2}+3^{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2}\geq$$

$$\geq 7\sqrt[7]{3^{x^3-1+3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)+3\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2\right)}}=7\sqrt[7]{3^{x^3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[4]{x}}-10}}\geq 7\sqrt[7]{3^{10\sqrt[10]{x^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6}-10}}=7\sqrt[7]{3^{10-10}}=7,$$ cu egalitate când $x^3-1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}-2 \Leftrightarrow x=1$, soluție unică.

2. Rezolvați ecuația:

$$2^{\sin x}+2^{\cos x}=3.$$

LAURENȚIU PANAITOPOL

SOLUȚIE. Notăm $\sin x = u$, $\cos x = v$, deci $u^2 + v^2 = 1$ şi $2^u + 2^v = 3$ (1). Din relația (1) rezultă că $u, v \in [0, 1]$. Vom arăta că singurele valori posibile pentru u şi v sunt $u = 0$, $v = 1$ şi $u = 1$, $v = 0$. Fie $u \in (0, 1)$. Atunci $3=2^u+2^{\sqrt{1-u^2}}=2^{u-1}+2^{u-1}+$ $+\ 2^{\sqrt{1-u^2}}>3\sqrt[3]{2^{2u-2+\sqrt{1-u^2}}}>3$, deoarece $2u-2+\sqrt{1-u^2}>0,\ \forall\ u\in\left(\dfrac{3}{5},1\right)$;

$3=2^u+2^{\sqrt{1-u^2}}=2^u+2^{\sqrt{1-u^2}-1}+2^{\sqrt{1-u^2}-1}>3\sqrt[3]{2^{u-2+2\sqrt{1-u^2}}}>3$, deoarece $u-2+2\sqrt{1-u^2}>$ $>0,\ \forall\ u\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$. Pentru valorile lui u şi v se obține $x\in\{2k\pi\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Rezolvați ecuația:

$$x^{\cos\frac{\pi}{x}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x},\ x\in\mathbb{N}^*.$$

SOLUȚIE. Dacă $x = 1 \Rightarrow 1 = 0$, fals.
Dacă $x = 2$, ecuația nu există, deoarece funcția tangentă nu e definită.

Dacă $x = 3$, atunci $3^{\cos\frac{\pi}{3}} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3}$, adevărat.

Dacă $x > 3$, $\Rightarrow \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{x} > \cos\frac{\pi}{3}$, deci $x^{\cos\frac{\pi}{x}} > x^{\cos\frac{\pi}{3}} > 3^{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$.

$\mathrm{tg}\frac{\pi}{x} < \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Deci niciun $x > 3$, $x \in \mathbb{N}$, nu este soluție a ecuației.

Rezultă că $x = 3$ este singura soluție.

4. Rezolvați ecuația:

$$\frac{1}{2^x + x + 1} + \frac{1}{3^x - 4x - 3} = \frac{1}{2^x - 4x - 2} + \frac{1}{x + 3^x}.$$

SOLUȚIE. Condiții: $2^x + x + 1 \neq 0$; $3^x - 4x - 3 \neq 0$; $2^x - 4x - 2 \neq 0$; $x + 3^x \neq 0$. Fie $a = 2^x + x + 1$, $b = 3^x - 4x - 3$, $c = -2^x + 4x + 2$. Rezultă $a + b + c = x + 3^x$ și ecuația devine $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$. Analog se obține $b + c = 0$, $c + a = 0$. Din $a + b = 0$ rezultă $2^x + 3^x = 3x + 2$. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 3^x$ este convexă, iar funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 2$ este de gradul întâi. Ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții. Se obține $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Din $b + c = 0$ rezultă $3^x = 2^x + 1$. Ecuația are soluția $x_1 = 1$. Din $c + a = 0 \Rightarrow 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5}$. Ecuația dată are soluțiile $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

5. Rezolvați ecuația:

$$5^{2x^2 - 10x + 7} = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

SOLUȚIE. Dacă $x \leq 0 \Rightarrow 5^{2x^2-10x+7} > 0$ și $\frac{x}{x^2+4} \leq 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții. Presupunem $x > 0$. Rezultă $\log_5 5^{2x^2-10x+7} = \log_5 \frac{x}{x^2+4} \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 7 = \log_5 x - \log_5(x^2 + 4) \Leftrightarrow \log_5(x^2 + 4) + 2(x^2 + 4) = \log_5(5x) + 2 \cdot 5x$. Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x + 2x$ este injectivă, ca sumă de funcții strict crescătoare. Din $f(x^2 + 4) = f(5x)$ și f injectivă $\Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$5^{2x} - 3 \cdot 2^{2y} + 5^x \cdot 2^{y-1} - 2^{y-1} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0.$$

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu $(5^x - 1)^2 + 2^{y-1}(5^x - 1) - 3 \cdot 2^{2y} = 0$.

I. $5^x - 1 = -2^{y+1} \Leftrightarrow 5^x + 2^{y+1} = 1$, ecuație care nu are soluție în $\mathbb{N}$.

II. $5^x - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$ (1). Observăm că pentru $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ ecuația (1) nu are soluție, iar dacă $y = 4 \Rightarrow x = 2$. Fie $y \geq 5$. Pentru $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, ecuația (1) devine $5^{2m+1} - 1 = 3 \cdot 2^{y-3} \Leftrightarrow 5^{2m} + 5^{2m-1} + 5^{2m-2} + \ldots + 5 + 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$; membrul stâng este impar, iar cel drept este par, deci nu există soluție. Pentru $x = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, ecuația (1) devine $25^m - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$ (2) $\Rightarrow 25^{m-1} + 25^{m-2} + 25^{m-3} + \ldots + 25 + 1 = 2^{y-4}$. Pentru m impar, membrul stâng este impar, iar cel drept este par, deci nu există soluție. Pentru $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, ecuația (2) devine $25^{2k} - 1 = 3 \cdot 2^{y-1} \Leftrightarrow 624(625^{k-1} + 625^{k-2} + 625^{k-3} + \ldots + 625 + 1) = 3 \cdot 2^{y-1}$. Membrul stâng este divizibil cu 13, iar cel drept nu este divizibil cu 13. Aşadar, singura soluție este $x = 2$, $y = 4$.

7. Rezolvați ecuația:

$$(2x + 1) \cdot \ln(8x^2 + 8x + 8) + (3x + 1) \cdot \ln(18x^2 + 12x + 8) = 0.$$

ARMAND MARTINOV

SOLUȚIE. Condiție: $x \in \mathbb{R}$. Ecuația este echivalentă cu:

$(2x + 1)(\ln 2 + \ln(4x^2 + 4x + 4)) + (3x + 1)(\ln 2 + \ln(9x^2 + 6x + 4)) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 1)(\ln 2 + \ln((2x + 1)^2 + 3)) + (3x + 1)(\ln 2 + \ln((3x + 1)^2 + 3)) = 0.$

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(\ln 2 + \ln(x^2 + 3))$. Funcția f este strict crescătoare, deoarece $f'(x) = \ln 2 + \ln(x^2 + 3) + \dfrac{2x^2}{x^2+3} > 0$. Deci funcția f este injectivă. De asemenea, $f(-x) = -f(x)$, deci funcția f este impară. Ecuația devine $f(2x + 1) + f(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow f(2x + 1) = -f(3x + 1) \Leftrightarrow f(2x + 1) = f(-3x - 1) \Leftrightarrow 2x + 1 = -3x - 1 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{5}$.

Probleme propuse

1. Rezolvați ecuația:

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x.$$

2. Rezolvați ecuația:

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x.$$

3. Rezolvați ecuația:

$$2^x + 3^x + 6^x = x^2.$$

4. Rezolvați ecuația:

$$3+5^{\frac{x}{3}}=2^x.$$

5. Rezolvați ecuația:

$$x^{2\log_2 3}+8(x^2-3)=17.$$

6. Rezolvați ecuația:

$$4^x+16^x+9^x=6^x+8^x+12^x.$$

7. Rezolvați ecuația:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^x+2^{x-1}\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4.$$

8. Rezolvați ecuația:

$$(10^x-1)(10^x-2)(10^x-3)(10^x-4)+1=0.$$

CLAUDIA NĂNUȚI

9. Determinați toate valorile lui a pentru care ecuația:

$$4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$$

are o singură soluție.

10. Rezolvați ecuația:

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}.$$

11. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$4^x+3(2^x+x^3)=x^2+(x+1)(x+2)\cdot 2^x.$$

GH. ANDREI

12. Rezolvați ecuația:

$$4^x\cdot x^3+(4^x-3^{x+1})x^2+4(3^{x+1}-4^{x+1})x+4(5\cdot 4^x-3\cdot 3^x)=0.$$

LAURA CONSTANTINESCU

13. Rezolvați ecuația:

$$(1+2^x)^n+(1+2^{-x})^n=8,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

14. Rezolvați ecuația:

$$(4+a^x)^{2n}+(4+a^{-x})^{2n}=50,$$

ştiind că $a>0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

15. Rezolvați ecuația:

$$3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}.$$

16. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt{6}^{x^2-3x+2}+\sqrt{8}^{x^2-3x+2}+\sqrt{10}^{x^2-3x+2}=\sqrt{12}^{x^2-3x+2}.$$

17. Rezolvați ecuația:

$$(2+a)^{\sqrt{x-4}}+(2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}=2, \text{ unde } |a|\le 1.$$

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{-2x^3+3x^2}=\frac{x^2+1}{x}.$$

19. Rezolvați ecuația:

$$5^x=3^{x+\{x\}},$$

unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

MARIUS BURTEA

20. Rezolvați ecuația:

$$2^{|x-2|\sqrt{x^2-4x+5}}+|x-2|\sqrt{x^2-4x+5}=3.$$

21. Rezolvați ecuația:

$$4^{\sin^2 x}+3^{\operatorname{tg}^2 x}=4^{\cos^2 x}+3^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

22. Rezolvați ecuația:

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3}=(x^2+x-57)^{10x}.$$

23. Rezolvați ecuația:

$$(x^2+4x+5)\cdot 3^{\frac{1}{x^2+5x+7}}+\frac{3^{x^2+5x+7}}{x^2+4x+5}=6.$$

ARMAND MARTINOV

24. Rezolvați ecuația:

$$3^{2x+1}-x\cdot 3^{x+1}-3^x-6x^2-7x-2=0.$$

25. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$2^x+3^y+4^z=2050.$$

MIHAIL MOGOŞANU

26. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$2^{x^2-2x+1}+2^{y^2-2y+2}+2^{z^2-4z+5}=1057.$$

PETRE NĂCHILĂ

27. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x\,.$$

28. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_x 2(1-x)+\log_{1-x} 2x=0\,.$$

29. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x=\log_3 x\cdot\log_4 x+\log_4 x\cdot\log_5 x+\log_5 x\cdot\log_3 x\,.$$

30. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_3^3(6-x)-4\log_3^2(6-x)\log_3 x+5\log_3(6-x)\log_3^2 x-2\log_3^3 x=0\,.$$

31. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\sqrt{\lg x^2-\lg^2 x}+\sqrt{\lg x^2-\lg^2 x+3}+\sqrt{\lg x^2-\lg^2 x+8}=6\,.$$

32. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_9(1+x^2+x^3)=2\log_4 x.$$

33. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_x\sqrt[3]{4}+3\log_x\left(x\sqrt[3]{2}\right)+\left(\log_x\sqrt[3]{4}\right)^2=12\,.$$

34. Rezolvaţi ecuaţia:
$$x^{\log_2 3}-3\log_2 x=2-x\,.$$

35. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_a\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_b x\,,\ \text{unde } a>1,\ b>1,\ a^2=b+1.$$

MARIN CHIRCIU

36. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)=\log_4\sqrt[3]{x}\,.$$

37. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_2(2+\log_2 x)-1=\sqrt{\log_2(\log_2 x)}\,.$$

38. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\log_2(2^{2x+1}+2^{1-2x}+4)=2^{-x}+2^x+\log_2^2(2^{-x}+2^x)\,.$$

39. Rezolvaţi ecuaţia:
$$\sqrt{\log_2\sqrt[4]{2x}+\log_x\sqrt[4]{2x}}+\sqrt{\log_2\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{2}{x}}}=2\,.$$

40. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\log_{\sin x}\cos x\cdot\log_{\sin^2 x}(\sin x\cdot\cos x)=1.$$

41. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\cos(\pi\log_2(x-4))\cdot\cos(\pi\log_2(x-1))=1.$$

42. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\log_x 3^k\right)\left(\log_x 3^{k!}\right)+\frac{1}{\left(\log_3 x\right)^2}=(n+1)!.$$

43. Fie a un număr real strict pozitiv, $a\neq 1$ şi $n\geq 1$ un număr natural. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt[3]{a}} x+\ldots+\log_{\sqrt[n]{a}} x=\log_x a+\log_{\sqrt{x}} a^2+\log_{\sqrt[3]{x}} a^3+\ldots+\log_{\sqrt[n]{x}} a^n.$$

44. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\log_a[x]=[\log_a x].$$

ADRIAN GHIOCA

45. Rezolvaţi ecuaţia:

$$[\log_3 x]+\left[\frac{1}{3}+\log_3 x\right]=3.$$

M. NEACŞU

46. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

47. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\log_3(2^x+1)=\log_2(3^x-1).$$

48. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(x+1)\lg 4^x=x\lg(2^{x+1}+x).$$

MARCEL CHIRIŢĂ

49. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^{2\log_2 3}+x^2(1-3^{\log_2 x})=1.$$

50. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^{\lg 5x}=2\cdot 5^{1-\log_2 x}\text{, pentru } x\in\left(\frac{1}{10},\infty\right).$$

CARMEN BOTEA, VIOREL BOTEA

CUPRINS