DANIEL SITARU

MATEMATICĂ

PROBLEME DE CONCURS

CLASELE 9-10

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuprins

Enunțuri 5

Soluții 49

MOTTO:
Crede în tine!

Enunţuri

1. Să se arate că, dacă $q \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kq^{k-1}}{1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}} < \frac{2(q^n-1)}{q-1}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi

$$A = (a\sqrt{ab} + c\sqrt{cd})(b\sqrt{ab} + d\sqrt{cd}); \quad B = (a\sqrt[3]{ab^2} + c\sqrt[3]{cd^2})(b\sqrt[3]{a^2b} + b\sqrt[3]{a^2b}),$$

atunci $A \geq B$.

3. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = x_{n+1}$, atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1 + x_{i+1}}\right) > n.$$

4. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sum (x+y)\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq 4\sum x\sqrt{yz}.$$

5. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{\sum (x+y)^2}{\sum \sqrt{x+y}} \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

6. Să se afle $x, y, z, t \in (0, \pi)$, astfel încât:

$$\begin{cases} \sin x \cos t + \sin t \cos y + \sin y + \cos z = \dfrac{1}{2} \\ \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

7. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq \sum (a^2+b^2-c^2)^2 + 24abc\sqrt[3]{abc}.$$

8. Să se arate că, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$; $6x+3y+2z=27+\frac{6}{x}+\frac{12}{y}+\frac{18}{z}$; $xyz=6$, atunci:

$$\min(x-1, y-2, z-3) \leq 3 .$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$(ab+cd)^2 \leq (b\sqrt[5]{ab^4}+d\sqrt[5]{cd^4})(a\sqrt[5]{a^4b}+c\sqrt[5]{dc^4}) .$$

10. Să se arate că, dacă $x, y, z, t \in (1, \infty)$ şi $xyzt = e$, atunci:

$$\ln^2 x \cdot \ln^2 y + \ln^2 z \cdot \ln^2 t \leq \frac{1}{16} .$$

11. Să se arate că numărul C_{4028}^{2014} este divizibil cu 2015.

12. Să se găsească primele 1007 zecimale ale numărului $x=(2+\sqrt{3})^{2014}$.

13. Să se arate că, dacă $x \in [0, 1]$, atunci:

$$2 \leq (\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x + (\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x \leq 2\sqrt{2} .$$

14. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2y^3z^4 = e^{58} \\ \dfrac{\ln x}{2} = \dfrac{\ln y}{3} = \dfrac{\ln z}{4} \end{cases} \cdot$$

15. Fie $A=\{(a,b) \mid 2a^2+2b^2+5ab+2a+b=6;\ a,b \in \mathbb{Z}\}$. Câte soluții are ecuația:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 ?$$

16. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$, astfel încât $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a} \geq \frac{d}{c}$. Să se arate că:

$$\frac{\lg a}{\lg b} \geq \frac{\lg d}{\lg c}.$$

17. Să se arate că:

$$\sqrt{C_n^0 C_n^1}+\sqrt{C_n^1 C_n^2}+\cdots+\sqrt{C_n^{n-1} C_n^n} \leq 2^n-1;\ n \in \mathbb{N} .$$

18. În câte moduri pot fi stocate 7 fişiere a câte 520 MB pe 4 hard-diskuri având fiecare 2 GB şi astfel încât fiecare hard-disk să conțină cel puțin un fişier?

19. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, 1)$, atunci:

$$abc \le a^{\sqrt{\log_a b}} \cdot b^{\sqrt{\log_b c}} \cdot c^{\sqrt{\log_c a}}.$$

Generalizare pentru $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$.

20. Să se arate că, dacă $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \frac{1}{\log_x 9 \cdot \log_x 27} + \dots + \frac{1}{\log_x 3^{2014} \cdot \log_x 3^{2015}} = \frac{2014}{2015}\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^2.$$

21. Să se determine $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$m! + n! + p! + q! = r!.$$

Generalizare: Să se determine $x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1} \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$x_1! + x_2! + \dots + x_p! = x_{p+1}!.$$

22. Să se demonstreze că:

$$C_{14}^{7} + C_{16}^{8} + C_{18}^{9} + \dots + C_{200}^{100} < 7! + 8! + 9! + \dots + 100!.$$

23. Să se demonstreze că:

a. $\pi^{\pi} \cdot e^{e} > \pi^{e} \cdot e^{\pi}$;

b. $e^{x-\pi} \cdot \pi^{e-x} > x^{e-\pi}$; $\forall\, x \in [e, \pi]$.

24. Să se rezolve ecuația:

$$1^x + 2^x + \dots + 2015^x = (C_{2016}^{2})^x.$$

25. Să se arate că:

$$\frac{(1+2+3+\dots+2015)!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 2015!} \in \mathbb{N}^*.$$

26. Să se rezolve ecuațiile:

a. $\ln^4 x - 10 \cdot \ln^2 x + 9 = 0$;

b. $2\ln^3 x + 3\ln^2 x + 3\ln x + 2 = 0$;

c. $2\ln^4 x + 7\ln^3 x + 9\ln^2 x + 7\ln x + 2 = 0$.

27. Să se rezolve ecuația:

$$\log_2(\log_3 x)+\frac{1}{\log_2(\log_3 x)}=\frac{5}{2}.$$

28. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_i\in\left[\frac{1}{10},10\right]$; $i\in\overline{1,n}$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\lg^2 x_i+x_i^{\lg x_i}}\right)\le 20n.$$

29. Fie lg a, lg b, lg c, lg d; a, b, c, $d\in(1,\infty)$ lungimile laturilor consecutive ale unui patrulater inscriptibil. Să se arate că:

$$\left(\lg\frac{bcd}{a}\right)\left(\lg\frac{acd}{b}\right)\left(\lg\frac{abd}{c}\right)\left(\lg\frac{abc}{d}\right)\le[\lg(ad)\cdot\lg(bc)]^2.$$

30. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=0}^{p}C_p^k A_x^k A_{n-p}^{x-k}=A_n^{2015}.$$

31. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$2\sum a^2+9S\sum\frac{1}{\sin A}\ge\frac{72RS}{p}.$$

32. Fie a, $b\in[0,\infty)$. Să se arate că, $(\forall)$ $x,y\in\mathbb{R}$:

$$a^{\sin x+\sin y}\cdot b^{\cos x+\cos y}\le e^{2\sqrt{\ln^2 a+\ln^2 b}}.$$

33. Fie $x\in(1,\infty)$; $y\in(0,\infty)$; $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\log_x(x^y-1)\log_x(x^y+1)\log_x(x^{2y}+1)\cdot\ldots\cdot\log_x(x^{2^{n-1}y}+1)<2^{n(n+1)}\cdot\left(\frac{y}{n+1}\right)^{n+1}.$$

34. Fie $a\in(1,\infty)$; $b\in(0,\infty)$. Să se arate că:

$$\log_a(a^b-1)\log_a(a^b+1)\log_a(a^{2b}+1)<\frac{64}{27}b^3.$$

35. Să se rezolve ecuația:

$$5^{\log_{13}x}+12^{\log_{13}x}=x.$$

36. Să se arate că, dacă a, b, $c > 0$; $a + b + c \geq 1$, atunci:

$$(a\cdot 8^a + b\cdot 8^b + c\cdot 8^c)(a\cdot 27^a + b\cdot 27^b + c\cdot 27^c) \geq 6 .$$

37. Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, care verifică relația:

$$3(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = (2n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\text{, pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

38. Fie $A = \ln(\lg x)$ şi $B = \lg(\ln y)$; $x, y \in (e, \infty)$. Să se afle valorile lui x şi y astfel încât:

$$\sqrt{A^2 - 2A + 5} + \sqrt{B^2 - 4B + 29} \leq 7 .$$

39. Să se arate că, dacă a, $b \in (0, \infty)$; $abc = 1$, atunci:

$$\sum c(2a\sqrt{a} + 3b^3) + \sum c(3a\sqrt{a} + 4b^4) > 21 .$$

40. Să se rezolve ecuația:

$$(\lg x + 1)(\lg x + 2)(\lg x + 3)(\lg x + 4) = -1 .$$

41. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{\ln 2 \cdot \lg 2} + \sqrt{\ln 3 \cdot \lg 3} < \sqrt{\ln 7 \cdot \lg 7} .$$

42. Să se determine centrul radical al cercurilor de ecuații:

$$C_1 : z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 3 = 0$$
$$C_2 : z\bar{z} + (2-i)z + (2+i)\bar{z} + 1 = 0$$
$$C_3 : z\bar{z} + (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} - 8 = 0 .$$

43. Să se arate că ecuația: $x! + 2015! = (x + 2015)!$ nu are soluție.

44. Să se demonstreze că $\lg 2016 < \dfrac{223}{3}$.

45. Să se demonstreze că:

$$10(\ln 605 - \ln 2) > 3\ln 10! .$$

46. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} + \dfrac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}$; $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $z^n + \dfrac{1}{z^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

47. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (1, \infty)$, atunci:

$$\lg x \lg y \lg z < \lg^3(x+y+z).$$

48. Să se arate că în orice triunghi avem relațiile:

$$m_a + m_b + m_c \ge l_a + l_b + l_c \text{ şi } \frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \ge 3.$$

49. Numărul diagonalelor unui poligon convex este egal cu numărul punctelor de intersecție a diagonalelor situat în interiorul poligonului. Câte laturi are poligonul?

50. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C};\ z_i \ne z_j;\ (\forall)\, i \ne j;\ i, j \in \overline{1,n};\ n \in \mathbb{N};\ n \ge 3$ şi $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$. Dacă $s - z_i = z_i;\ i \in \overline{1,n}$, să se arate că $s = 0$.

51. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

$$z - 2015 + z - 2016 = 1.$$

52. Fie A, B, C măsurile, în radiani, ale unghiurilor unui triunghi. Să se arate că:

$$\frac{Ah_a + Bh_b + Ch_c}{h_a + h_b + h_c} \le \frac{\pi}{3};\ \frac{Am_a + Bm_b + Cm_c}{m_a + m_b + m_c} \le \frac{\pi}{3}.$$

53. Fie $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| z_i + \frac{1}{z_i} \right|^4 \ge 4n + 8\sum_{i=1}^{n} Re(z_i^2).$$

54. Să se arate că, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$; $n \ge 2$, avem:

$$6(\sqrt[n]{1!} + \sqrt[n]{2!} + ... + \sqrt[n]{n!}) \le n^2 + 6n - 1.$$

55. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)(k+1)!} = \frac{599}{600}.$$

56. Să se demonstreze că, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{3!!} + \frac{3}{4!!} + \frac{2}{5!!} + \frac{5}{6!!} + ... + \frac{n}{(2n+1)!!} + \frac{2n+1}{(2n+2)!!} < 1.$$

57. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k!}(k+1+\sqrt{k+1})}=\frac{1}{12\sqrt{5}}.$$

58. Într-o progresie aritmetică, $a_1 = 2$; $a_2 = 502$. Aflați cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât scrierea lui a_k să înceapă cu cifra 9.

59. Într-o progresie aritmetică, $a_1 = p;\ a_2 = q;\ p, q \in \mathbb{N}^*;\ q > p$. Aflați $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât scrierea lui a_k să înceapă cu cifra 9.

60. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$(xyz)^{xyz} < 3^{xyz}\cdot(xyz)!.$$

61. Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\log_2[mn(C_{2m}^{m}C_{2n}^{n})^2] > 2(2m+2n-1).$$

62. Fie $H=\left\{z \mid z=a+b\varepsilon+c\varepsilon^2;\ a,b,c\in\mathbb{R};\ a,b,c\in\mathbb{R};\ \varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Să se arate că, dacă $z \in H$, atunci $z^{2015} \in H$.

63. Fie $a \in \mathbb{N}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sqrt{a}\left[(1+\sqrt{a})^{2n}-(1-\sqrt{a})^{2n}\right]\in\mathbb{N}.$$

64. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\sum_{cyc}\sqrt[3]{2x} \ge 6\sum_{cyc}\frac{x}{2+3x}.$$

65. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$\pi(h_a+h_b+h_c)\ge 9p.$$

66. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$\pi(am_a+bm_b+cm_c)\ge 2p^2.$$

67. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$4(m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c) \le 2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + ac + bc\,.$$

68. Să se arate că:

$$\sqrt[2015]{(1+\log_2 3)(1+\log_3 4)\cdot\ldots\cdot(1+\log_{2014} 2015)} - \sqrt[2015]{\log_2 2015} \ge 1\,.$$

69. În orice ΔABC avem:

$$\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \le \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)\,.$$

70. Fie $a, b, c, x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\sqrt[2015]{abc} + \sqrt[2015]{xyz} \le \sqrt[2015]{(a+x)(b+y)(c+z)}\,.$$

71. Fie $n \in \mathbb{N}^*$; $n \ge 2$. Să se arate că:

$$\sqrt[n]{n!} + \sqrt[n]{\log_2(n+1)} \le \sqrt[n]{(1+\log_2 3)(2+\log_3 4)\cdot\ldots\cdot(n+\log_n(n+1))}\,.$$

72. În orice triunghi este adevărată relația:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \le \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 12RS}{4pS}\,.$$

73. În triunghiul ABC avem relația:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 4RS} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 4RS} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 4RS} \le \frac{\sin A}{2aS}\,.$$

74. În ΔABC: $M \in (BC)$; $N \in (AC)$; $P \in (AB)$; $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{\pi}$. Să se arate că:

$$\pi \sum_{cyc} AM \ge \sum_{cyc} (b + (\pi - 1)c)\cos\frac{A}{2}\,.$$

75. Să se arate că, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left|e^{2015x} - e^{-2015x}\right| \ge 2015\left|e^x - e^{-x}\right|.$$

76. Fie $M = \{z_k \in \mathbb{C} \mid z_k = 2^k;\ k \in \overline{0,n}\}$. Dacă $A \subset M$, atunci:

$$\sum_{z_p \in A} z_p \neq 0 .$$

77. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 - 10x^3 + x^2(25 + 2\sqrt{5}) - 10\sqrt{5}x + 4\sqrt{5} - 16 = 0 .$$

78. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$|\ln xy| + |\ln yz| + |\ln zx| \leq 2|\ln xyz| + \left|\ln \frac{x}{y}\right| + \left|\ln \frac{y}{z}\right| + \left|\ln \frac{z}{x}\right| .$$

79. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$\frac{1}{R}\sum m_a \geq \sum (1 + \cos A)\cos\frac{B - C}{2} .$$

80. În triunghiurile ABC şi MNP de laturi a, b, c, respectiv m, n, p, avem:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3 \\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = 5 \\ am + bn + cp = 15. \end{cases}$$

Să se arate că triunghiurile sunt asemenea.

81. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$(a + b + c + d)^\pi \left(\frac{1}{a^\pi} + \frac{1}{b^\pi} + \frac{1}{c^\pi} + \frac{1}{d^\pi} \right) \geq 4^{\pi+1} .$$

82. Să se arate că:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{11\sqrt[3]{10}} < 2{,}5 .$$

83. Să se arate că:

$$16\sqrt{\sin e\sqrt{\sin e\sqrt{\sin e\sqrt{\sin e}}}} \leq 15\sin e + 1 .$$

84. Să se arate că în orice triunghi avem relația:

$$\sum \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2p-c}+\sqrt{|a-b|}} \leq 3\sqrt{2}\ .$$

85. Fie x, y, z, $t \in (0. \infty)$. Să se arate că:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt[3]{(x+y+z)(x+y+t)(x+z+t)}} \leq \frac{4}{3}\ .$$

86. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$2pR\sum_{cyc} \sin A \sin B \geq 9S\ .$$

87. Să se arate că în orice triunghi avem relația:

$$p\sum_{cyc}(h_a^2+r_a^2) > 54(p-a)(p-b)(p-c)\ .$$

88. Să se arate că în orice triunghi:

$$3(r_a^4+r_b^4+r_c^4) \geq p^4\ .$$

89. Să se arate că, dacă a, b, $c > 0$ şi $a + b + c + 2 \leq abc$, atunci $abc \geq 8$.

90. Să se arate că, dacă a, b, c, $d \in (0, \infty)$; $a + b + c + d = 1$, atunci:

$$a^a b^b c^c d^d \geq \frac{1}{4}.$$

91. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ .$$

92. În ΔABC:

$$A\sin A + B\sin B + C\sin C \geq \frac{4\pi pS}{3abc}\ .$$

93. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\sqrt[4]{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt[2015]{\frac{2015}{2014}} < 2014,(9)\ .$$

94. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$2\pi a^2b^2c^2 \le p^2R(2p-a)(2p-b)(2p-c).$$

95. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\lg^3 a + \lg^3 b + \lg^3 c + \lg(abc) \ge 4\left(\frac{\lg a \lg^2 b}{\lg(ab)} + \frac{\lg b \lg^2 c}{\lg(bc)} + \frac{\lg c \lg^2 a}{\lg(ac)}\right).$$

96. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $\pi^{x+y+z}(\pi^{3x}+\pi^{3y}+\pi^{3z}) = \pi^{3(x+y)}+\pi^{3(x+z)}+\pi^{3(y+z)}$, atunci:

$$(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)=0.$$

97. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$\frac{r_a^2}{a}+\frac{r_b^2}{b}+\frac{r_c^2}{c} \ge \frac{81r^2}{2p}.$$

98. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}} = xy \\ x^5+y^5 = 8xy \end{cases}.$$

99. Să se arate că:

$$\sqrt[8]{11}+\sqrt[12]{7} \le 2\sqrt[5]{4}+\sqrt[8]{11}-\sqrt[12]{7}.$$

100. Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că:

$$\frac{2\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{c}}+\frac{2\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}+c\sqrt[3]{c}}+\frac{2\sqrt[3]{c}}{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{b}} \ge 3.$$

101. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că:

$$\log_b(a-2\sqrt[3]{a}+2)+\log_c(b-2\sqrt[3]{b}+2)+\log_a(c-2\sqrt[3]{c}+2) \ge 1.$$

102. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in (1, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$; $n \ge 2$. Să se arate că:

$$\log_{x_2}(x_1-2\sqrt[3]{x_1}+2)+\log_{x_3}(x_2-2\sqrt[3]{x_2}+2)+\dots+\log_{x_1}(x_n-2\sqrt[3]{x_n}+2) \ge \frac{n}{3}.$$

103. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 2$. Să se arate că:

$$\log_{x_1}(x_2\sqrt{x_2} - 2x_2 + 4) + \log_{x_2}(x_3\sqrt{x_3} - 2x_3 + 4) + \ldots + \log_{x_n}(x_1\sqrt{x_1} - 2x_1 + 4) \geq n .$$

104. Dacă: $0 < A < B < C < D < \frac{\pi}{2}$, atunci:

$$\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right)^2 > 2(\sin A\sin C + \sin B\sin D) .$$

105. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$a + b + c + d \leq \frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{abcd} .$$

106. Fie $x, y, z, t \in (0, \infty)$; $xyzt = 1$. Să se arate că:

$$x^{\operatorname{arctg} x} \cdot y^{\operatorname{arctg} y} \cdot z^{\operatorname{arctg} z} \cdot t^{\operatorname{arctg} t} \geq 1 .$$

107. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 16(a_2^2 + b_2^2) \\ a_1^2 + b_1^2 = 81(a_3^2 + b_3^2) \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0. \end{cases}$$

108. Să se rezolve inecuația:

$$\sum_{k=1}^{x} k(x-1)^{k-1} C_x^k \leq 5^5 .$$

109. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon convex; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Să se arate că:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + A_i) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi^k (n-2)^k}{k!} .$$

110. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Să se arate că:

$$\sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_1x_3} + \ldots + \sqrt[3]{x_1x_n} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \ldots + \sqrt[3]{x_{n-1}x_n} \leq \frac{n^2 + n - 2}{6} .$$

111. Fie $f:\mathbb{Q}^*; f(n)=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Să se arate că:

a. $f(100)>\dfrac{1}{20}$; b. $f(99)<\dfrac{1}{10}$.

112. Să se demonstreze că, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt[3]{n(n+1)}\le\frac{n(n+3)}{3}.$$

113. Să se arate că în orice ΔABC este valabilă relația:

$$\prod_{cyc}(3a^2+2bc\cos A)\ge[(2p-a)(2p-b)(2p-c)]^2.$$

114. Să se arate că, dacă $a, b, c\in(0,\infty)$, atunci:

$$\frac{1}{a^{12}+b^{12}+4}+\frac{1}{b^{12}+c^{12}+4}+\frac{1}{c^{12}+a^{12}+4}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}\right).$$

115. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k-2)!+(k-1)!+k!+(k+1)!}=\frac{23}{24}.$$

116. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{x_i}{3x_i^2+4}\le 1.$$

117. Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{3k+1}{k+1}C_{2k}^{k}=68.$$

118. Să se arate că în orice ΔABC avem:

$$\frac{4}{a^2+2bc}+\frac{4}{b^2+2ac}+\frac{4}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}.$$

119. Să se arate că în ΔABC avem:

$$\frac{1}{a^2\sin A+4S}+\frac{1}{b^2\sin B+4S}+\frac{1}{c^2\sin C+4S}\le\frac{1}{2S}.$$

120. Să se arate că, dacă $x, y, z, t \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{x^3+y^3+z^3+t^3} \geq \frac{x^3+y^3+z^3+t^3}{x^4+y^4+z^4+t^4}.$$

121. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

$$\begin{cases} |\ln x| + |\ln y| + |\ln z| = \left|\ln \frac{xy}{z}\right| + \left|\ln \frac{xz}{y}\right| + \left|\ln \frac{yz}{x}\right| \\ x \operatorname{tg} y + y \operatorname{tg} z + z \operatorname{tg} x = x\sqrt{3} \end{cases}.$$

122. Să se arate că în ΔABC este valabilă relația:

$$ab + bc + ac > \frac{12RS}{p}.$$

123. Să se arate că, dacă $x, y, z \in [a, b]$; $0 < a < b$, atunci:

$$\sqrt[3]{\prod_{cyc}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \leq \frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Aplicație: Dacă $x, y, z \in [1, 2]$, să se arate că:

$$\sqrt[3]{\prod_{cyc}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \leq \frac{9}{2}.$$

124. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$10^x + 10^{2x} + 10^{3x} + \ldots + 10^{10x} + 45 \geq 53 \cdot 10^x.$$

125. Să se rezolve ecuația:

$$\log_x[x^2] + \log_y[y^3] + \log_z[z^5] = 10.$$

126. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic ABC este valabilă relația:

$$\frac{\operatorname{tg}^4 A}{\operatorname{tg}^3 B} + \frac{\operatorname{tg}^4 B}{\operatorname{tg}^3 C} + \frac{\operatorname{tg}^4 C}{\operatorname{tg}^3 A} \geq \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

127. Să se arate că, $(\forall)$ $x, y, z, t \in (1, \infty)$, avem:

$$\frac{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}{1+xyzt} \leq 8.$$

128. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (1, \infty) \setminus \{e^3\}$; $abc = e$, atunci:

$$\sum_{cyc} \frac{\ln a \ln b - \ln c + 2}{3 - \ln c} \leq 4.$$

129. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$; $n \geq 2$; $a + b + c = 1$, atunci:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt[n]{(b+c)^m}} > 1 + \frac{3m}{2n}.$$

130. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $abc = 1$, atunci:

$$\min \prod_{cyc} \left(4ac + \frac{9bc}{a}\right).$$

131. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $abc = 1$, atunci:

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(b^2 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(c^2 + \frac{a^2}{c^2}\right) \geq 8.$$

132. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{1}{2}\sum (y+z)\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[4]{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).$$

133. Să se demonstreze că:

$$\ln^2 2 \ln 15 + \ln^2 3 \ln 10 + \ln^2 5 \ln 6 > \ln 8 \ln 3 \ln 5.$$

134. Să se arate că în ΔABC:

$$\prod_{cyc} \left(\frac{a}{2} - c \cos B\right) \leq R^3.$$

135. Să se arate că în ΔABC:

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq 8RSp.$$

136. Să se demonstreze că:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^k) \geq \ln(e^{n+1} - 1) - \ln(e - 1), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

137. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (1, \infty)$, $xyz = e$, atunci:

$$\ln(xe)\ln(ye)\ln(ze) \geq 8\ln\left(\frac{e}{x}\right)\ln\left(\frac{e}{y}\right)\ln\left(\frac{e}{z}\right).$$

138. Să se arate că, dacă $a, b, c, d, x, y, z, t \in (0, \infty)$, $2a + 5b = 1$; $3c + 7d = 1$, atunci:

$$x^a y^b + z^c t^d < \sqrt{x} + \sqrt[3]{z} + \sqrt[5]{y} + \sqrt[7]{t}\ .$$

139. Să se arate că:

$$e(\sqrt{2} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{24}) > 9\,.$$

140. Să se arate că, dacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\left(\frac{(n!)^2 + (m!)^2 + (p!)^2}{3}\right)^3 \geq n^n m^m p^p\,.$$

141. Fie $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+$; $m, n \in \mathbb{N}^*$; $ma + nb = 1$. Atunci:

$$x^a y^b < \sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y}\ .$$

142. Să se arate că:

$$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[5]{5} + \sqrt[7]{7}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[5]{5}} + \frac{1}{\sqrt[7]{7}}\right) \leq \left(1 + \sqrt[3]{3}\right)^2.$$

143. Să se demonstreze că:

$$\sqrt[100]{1 + 2^{100} + 3^{100} + \ldots + 100^{100}} \geq \sqrt[101]{1 + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 100^{101}}\ .$$

144. Să se arate că, dacă $a, b, c, m \in (0, \infty)$, atunci:

$$m\left(\ln\frac{m^2}{ab} + \ln\frac{m^2}{bc} + \ln\frac{m^2}{ac}\right) \geq \ln\left(\frac{m}{a}\right)^{2a} + \ln\left(\frac{m}{b}\right)^{2b} + \ln\left(\frac{m}{c}\right)^{2c}\ .$$

145. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \max\{(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2\}\ .$$

146. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq (a^b \cdot b^a)^{\frac{1}{a+b}} \cdot (b^c \cdot c^b)^{\frac{1}{b+c}} \cdot (a^c \cdot c^a)^{\frac{1}{a+c}}.$$

147. Să se arate că, dacă $a, b, c, d, x, y, z, t \in (0, \infty)$:

$$\sqrt[4]{abcd}+\sqrt[4]{xyzt} \leq \sqrt[4]{(a+x)(b+y)(c+z)(d+t)}.$$

148. Să se arate că, dacă $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$, atunci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5+\left(\frac{b}{c}\right)^5+\left(\frac{c}{d}\right)^5+\left(\frac{d}{e}\right)^5+\left(\frac{e}{f}\right)^5+\left(\frac{f}{a}\right)^5 \geq \frac{a}{f}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{f}{e}.$$

149. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$; $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$, atunci:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+1} < \prod\left(\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\right)^a.$$

150. Să se determine $x, y, z \in (0, \infty)$, astfel încât:

$$x^x+y^y+z^z=e^{x+e^2}+e^{y+e^2}+e^{z+e^2}.$$

151. Să se arate că:

$$\sqrt{\log_2 105}+\sqrt{\log_2 35}+\sqrt{\log_2 7} \leq \sqrt{\log_2(3\cdot 5^4\cdot 7^9)}.$$

152. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c^2}\left(\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{3}{2RS}.$$

153. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+7y+11z=19 \\ e^x+7e^y+11e^z=19e \end{cases}.$$

154. Să se arate că:

$$\frac{\log_2^2 3+\log_3^2 5}{\log_2 3+\log_3 5}+\frac{\log_3^2 5+\log_5^2 2}{\log_2 5+\log_5 2}+\frac{\log_5^2 2+\log_2^2 3}{\log_5 2+\log_2 3} > 3.$$

155. Să se arate că, dacă a, b, $c \in (0, 1)$, atunci:

$$8abc(1-a)^a(1-b)^b(1-c)^c \le a^a b^b c^c .$$

156. Să se rezolve ecuația:

$$2^x\left(3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^x + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 5^{x+\frac{1}{x}}\right) = 196 .$$

157. Să se arate că, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$; $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$; $n \in \mathbb{N}^*$; $n \ge 2$, atunci:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln a_i(1-a_i) \le \ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right).$$

158. Să se arate că, dacă x, y, $z \in (1, \infty)$; $x + y + z = 9$, atunci:

$$2\sum_{cyc} y \operatorname{arctg} x > 27 - \sum_{cyc} y \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

159. Să se arate că, dacă x, y, $z \in \mathbb{R}$, atunci:

$$2(e^x + e^y + e^z) \ge 9 - (e^{-x-y} + e^{-y-z} + e^{-z-x}) .$$

160. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC:

$$\frac{27 m_a^2 m_b^2 m_c^2}{S^6} \le \left(\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2}\right)^3 .$$

161. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$\sum \sqrt[3]{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg} A} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} B}\right) \le 2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C .$$

162. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$(2p + S)\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{cS}{c+S}\right) < (a+c)(a+c+S) .$$

163. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) > e^{\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}} .$$

164. Fie $x, y, z, t \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} t = \pi$. Atunci:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\geq\frac{4}{\sqrt[4]{(xyzt)^3}}.$$

165. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$a^4c+b^4a+c^4b\geq 24\sqrt[3]{2}(RS)^{\frac{5}{3}}.$$

166. Să se arate că, dacă $x, y, z, t \in (0, \infty)$; $a, b, c, d \in (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ astfel încât: $abc + abd + acd + bcd = abcd$, atunci:

$$ax^{\frac{1}{a}}+by^{\frac{1}{b}}+cz^{\frac{1}{c}}+dt^{\frac{1}{d}}\geq xyzt.$$

167. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$\sum(a+b)(a+c)\geq 8\sqrt{RS}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

168. Fie $x_i \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$; $i\in\overline{1,10}$; $x_1+x_2+...+x_{10}=1$. Să se calculeze:

$$\min\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\cdot...\cdot\left(\frac{1}{x^{10}}-1\right).$$

169. Să se demonstreze că:

$$\log_{15}^{3}\log_{2}^{5}+\log_{42}^{6}\log_{2}^{7}\leq\log_{630}^{18}\log_{2}^{35}.$$

170. Să se arate că, dacă $x, y, z, t \in (0, \infty)$, atunci:

$$x\sqrt{xy}+x\sqrt[3]{yz}+\sqrt[4]{x^3yzt}\leq 2x^3+3(y+z+t).$$

171. Să se arate că în triunghiul ABC este adevărată relația:

$$\frac{aA^5+bB^5+cC^5}{aA^4+bB^4+cC^4}\leq\frac{aA^7+bB^7+cC^7}{aA^6+bB^6+cC^6}.$$

172. Să se arate că:

$$(\log_2 3)^3+(\log_3 4)^3+(\log_4 5)^3+(\log_5 2)^3\geq\log_2 5+2\log_5 2+\frac{1}{2}\log_2 3+\log_3 2.$$

173. Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ şi $a_i \in (0,\infty)$; $i \in \overline{1,n}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j\right).$$

174. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$(x^x + y^y + z^z)^3 > 27\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2.$$

175. Fie $a, b, x, y \in (0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Să se arate că:

$$(ax+by)^n \leq (1+a^n)(1+b^n)(x^n+y^n).$$

176. Să se arate că, dacă:

$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in (0, \infty)$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$,
atunci:

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1}+\frac{x_2^2}{x_2+y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n+y_n} \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}.$$

177. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a + b + c = 1$, atunci:

$$\sum\left|a-\frac{1}{3}\right| \leq \sqrt{2}\sum\left(a-\frac{1}{3}\right)^2.$$

178. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$\sum(1+\sin A)^{2015} \geq \frac{4030p}{R}+2^{2015}\sum\sin^{4030}\left(\frac{A}{2}\right).$$

179. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$\min(\sqrt[3]{a},\sqrt[4]{b},\sqrt[5]{c}) \leq \sqrt[12]{abc} \leq \max(\sqrt[3]{a},\sqrt[4]{b},\sqrt[5]{c}).$$

180. Să se demonstreze că:

$$\log_{12}2+\log_{20}3+\log_{30}4+\log_{42}5+\log_{14}6+\log_{6}7 \geq 3.$$

181. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\left(\sum a\sin A\right)^2+\left(\sum a\cos A\right)^2 \leq 4p^2.$$

182. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}} \leq \sqrt{n}\ .$$

183. Fie $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $i \in \overline{1,n}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_i)} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-n}.$$

184. Să se arate că în triunghiul ABC este adevărată relația:

$$\frac{m_a m_b}{m_a + m_b} + \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} + \frac{m_c m_a}{m_c + m_a} \leq p\ .$$

185. Să se demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \ldots + \frac{\sqrt{(n-1)n}}{\sqrt{2n-1+2\sqrt{(n-1)n}}} < \frac{n}{2}\sqrt[2n]{n!}\ .$$

186. Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci:

$$2\sum_{k=3}^{n} \sqrt{\ln k} + \sqrt{\ln 2} \leq \sqrt{2}\sum_{k=2}^{n} \sqrt{\ln k(k+1)} - \sqrt{\ln(n+1)}\ .$$

187. Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$\frac{1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \ldots + n^2(n+1)! - 2}{(n+1)!} = 108\ .$$

188. Să se arate că, dacă $a \in [0,3]$; $b \in [0,5]$; $c \in [0,7]$, atunci:

$$\sqrt[3]{a+1} + \sqrt[5]{b+1} + \sqrt[7]{c+1} \leq 6\ .$$

189. Să se arate că, dacă $A, B, C \in \left[1, \frac{\pi}{3}\right)$, atunci:

$$\prod \left(\frac{1+A}{A + \operatorname{tg} A}\right) \geq \frac{2}{ABC + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}\ .$$

190. Să se afle $x, y, z \in (0, \infty)$ astfel încât:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ y^5 - z^5 = \ln\left(\dfrac{z}{y}\right) \\ 2x^y + 3y^z + 5z^x = 10 \end{cases}.$$

191. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a + b + c + d = 1$, atunci:

$$\sum\left|a - \frac{1}{4}\right| \le \sqrt{3}\sum\left(a - \frac{1}{4}\right)^3.$$

192. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 1$ şi $a \ne b \ne c \ne a$, atunci:

$$5\sqrt[5]{b^2c^3} + 9\sqrt[9]{c^4a^5} + 8\sqrt[8]{a^3b^5} < a + 7.$$

193. Să se demonstreze că dacă $a, b \in (1, \infty)$; $a \ne b$; $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\ln(a^m \cdot b^n) > (m+n)(\ln^m a \cdot \ln^n b)^{\frac{1}{m+n}}.$$

194. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$; $a + b + c + d = 5$, atunci:

$$\frac{5-a}{5+a} + \frac{5-b}{5+b} + \frac{5-c}{5+c} + \frac{5-d}{5+d} \ge \frac{12}{5}.$$

195. Să se găsească toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x) + x + 1 = \sqrt[5]{f^5(x) + x^5 + 1};\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

196. Să se arate că:

$$\frac{\ln 4 \ln 3}{\ln 6} + \frac{\ln 8 \ln 3 \ln 5}{\ln 2 \ln 3 + \ln 2 \ln 5 + \ln 3 \ln 5} < 4.$$

197. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $abc = 1$, atunci:

$$\frac{2}{ac + bc} + \frac{3}{ab + bc + ca} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

198. Să se arate că, dacă $a, b, c \in [0, 1)$, atunci:

$$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq \left(\frac{1+\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}\right)^3 .$$

199. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = 1; f(1) = f(2) = 0$ şi:

$$f(x+3) + 40f(x+1) = 11f(x+2) + 48f(x);\ (\forall)\ x \in \mathbb{R} .$$

200. Să se arate că, dacă $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1; a, b, c \in (1, \infty); A, B, C \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{A^a}{a}+\frac{B^b}{b}+\frac{C^c}{c} \geq ABC .$$

201. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (1, \infty)$, atunci:

$$\sum\left(\frac{\ln x}{\ln y \ln z}+\frac{\ln y}{\ln x \ln z}\right) \geq \frac{18}{\ln(xyz)} .$$

202. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[6]{c}+\sqrt[8]{d} \geq \sqrt[20]{abcd} .$$

203. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{1008} \sqrt[2k]{k!} > \sqrt[1008\cdot 1009]{\prod_{k=1}^{1008} k!} .$$

204. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$3(aA+bB+cC) < 2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)+6(A^2+B^2+C^2) .$$

205. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z^2+t^4=b^4 \\ xz+yt \geq ab \end{cases} ;\ a, b \in \mathbb{R}^* .$$

206. Să se arate că:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{120}\cdot\sqrt[5]{5} < 16 .$$

207. Fie $a, b \in [0, 1]$. Notăm:

$$A = 2[ab + (a+b)(2-a-b) + (1-a)(1-b)]^3;$$
$$B = 27[ab(2-a-b) + (1-a)(1-b)(a+b)]^2.$$

Să se arate că $A \geq B$.

208. Să se arate că:

$$\frac{\ln 60 \ln 90 \ln 150}{\ln 6 \ln 10 \ln 15} \geq 8.$$

209. Să se afle $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ astfel încât:

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ \dfrac{x}{y^3 z^2} + \dfrac{y}{z^3 x^2} + \dfrac{z}{x^3 y^2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

210. Să se arate că:

$$1008(\sqrt[2016]{2} + \sqrt[2016]{3} + \sqrt[2016]{5}) < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 3021.$$

211. Să se arate că, dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} (\Re z_i - \Im z_i)\right|}{\sum_{i=1}^{n} |z_i|} \leq \sqrt{2}.$$

212. Să se arate că, dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} (\Re z_i + \Im z_i)\right|}{\sum_{i=1}^{n} |z_i|} \leq \sqrt{2}.$$

213. Să se arate că, dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} (\Re z_i + \Im z_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} (\Re z_i - \Im z_i)\right|}{\sum_{i=1}^{n} |z_i|} \leq 2\sqrt{2}.$$

214. Să se arate că, dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}(\Re z_i + \Im z_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}(\Re z_i - \Im z_i)\right|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|\right)^2} \le 2 .$$

215. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$a^4 + b^4 + c^4 \ge 16S^2 .$$

216. Să se arate că, dacă $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$(n!)^6 < \left(\frac{n(n+1)^4(2n+1)}{48}\right)^n .$$

217. Să se arate că, dacă ΔABC este ascuțitunghic, atunci:

$$\sum\frac{(\operatorname{tg} A)^{2n+1}}{\sqrt{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}} \ge 3\left(\sum \operatorname{tg} A\right)^{\frac{2n}{3}} .$$

218. Să se arate că:

$$\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 9} + \frac{1}{\ln 25} > \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 15} + \frac{1}{\ln 10} .$$

219. Să se arate că:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{k(k+2)\sqrt[k]{2}} > \frac{n-1}{n+2};\ (\forall)\ n \in \mathbb{N};\ n \ge 2 .$$

220. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0\ \infty)$, atunci:

$$2\sum\sqrt{xy} \le \sum\sqrt[5]{xy}\left(\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{y^3}\right) \le 2(x+y+z) .$$

221. Să se demonstreze că, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci:

$$e^{x-y-2z} + e^{y-z-2x} + e^{z-x-2y} \ge e^{-2x} + e^{-2y} + e^{-2z} .$$

222. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{a^7}{(c+d)^6}+\frac{b^7}{(c+d)^6}+\frac{c^7}{(d+a)^6}+\frac{d^7}{(a+b)^6}\geq \frac{1}{16}\sqrt[4]{abcd}\ .$$

223. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{a^5}{b^4}+\frac{b^5}{c^4}+\frac{c^5}{d^4}+\frac{d^5}{a^4}\geq a+b+c+d\ .$$

224. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\sum C_{2a+2b}^{a+b}\right)^3 > 27(C_{2a}^{a}C_{2b}^{b}C_{2c}^{c})^2\ .$$

225. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{1}{4^{\max(a,b,c)}}\sum C_{2a}^{a}\ .$$

226. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$; $abcd = 1$, atunci:

$$\prod(3a+b+c+d)\geq 3^4\cdot 4^2\ .$$

227. Să se arate că, dacă $a, b, c \in [1, \infty)$, atunci:

$$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})(c+\sqrt{c})}\geq \frac{2}{abc+\sqrt{abc}}\ .$$

228. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$\pi^2\left(\sum\frac{a^3}{B^2}\right)\geq 27abc\ .$$

229. Să se arate că în triunghiul ABC este valabilă relația:

$$64\sum\frac{m_a^6}{b^4}\geq 27\sum a^2\ .$$

230. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\log_a\left(\frac{b^3+b^2+3}{5}\right)+\log_b\left(\frac{c^3+c^2+3}{5}\right)+\log_c\left(\frac{a^3+a^2+3}{5}\right) > 3\ .$$

231. Să se arate că, dacă a, b, c, $d \in (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{\ln^3 a}{\ln^2 a + \ln b \ln c} + \frac{\ln^3 b}{\ln^2 b + \ln c \ln a} + \frac{\ln^3 c}{\ln^2 c + \ln a \ln b} \geq \ln \sqrt{abcd}\ .$$

232. Să se arate că, dacă a, b, $c \in (0, \infty)$; $b(a + c) = 1$, atunci:

$$bc + 3 \geq \frac{2\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b^2}} + \frac{2\sqrt[4]{bc^3}}{\sqrt[4]{b} + 3\sqrt[4]{c^3}}\ .$$

233. În ΔABC:

$$16\sum m_a^2 m_b^2 \geq 9abc(a+b+c)\ .$$

234. Să se arate că, dacă a, b, $c > 0$; $a + b + c \geq 1$, atunci:

$$(a \cdot 8^a + b \cdot 8^b + c \cdot 8^c)(a \cdot 27^a + b \cdot 27^b + c \cdot 27^c) \geq 6\ .$$

235. Să se arate că în triunghiul ABC:

$$m_a^2 h_a + m_b^2 h_b + m_c^2 h_c \geq \frac{9S}{2}\sqrt[3]{abc}\ .$$

236. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(m_a + km_b + \frac{m_c}{k}\right)\left(m_b + km_c + \frac{m_a}{k}\right)\left(m_c + km_a + \frac{m_b}{k}\right) \geq (27 l_a l_b l_c)^n;\ n \in \mathbb{R}^*\ .$$

237. Să se arate că, dacă a, b, $c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\sum \frac{\lg^3 a}{\lg(ab)} \geq \frac{1}{2}\sum \lg^2 a\ .$$

238. Să se arate că, dacă a, b, $c \in (0, \infty)$, atunci:

$$40abc(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \leq \left(\sum a\right)^5 - 3abc\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ .$$

239. Să se arate că, dacă x, y, z, $t \in (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{\ln\left(\frac{x}{z}\right)}{\ln(yz)} + \frac{\ln\left(\frac{y}{t}\right)}{\ln(zt)} + \frac{\ln\left(\frac{z}{x}\right)}{\ln(tx)} + \frac{\ln\left(\frac{t}{y}\right)}{\ln(xy)} \geq 0\ .$$

240. Să se arate că, dacă $a, b, c, d, e \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-d}{c+d}+\frac{c-e}{d+e}+\frac{d-a}{e+a}+\frac{e-b}{a+b} \geq 0 .$$

241. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$; $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} \cdot x_2^{\frac{1}{x_2}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{1}{x_n}} \leq \frac{1}{n^{n^2}} .$$

242. Să se arate că, dacă $a, b \in (0, \infty)$; $a + b = 1$, atunci:

$$a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{16} .$$

243. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (1, \infty)$, atunci:

$$\log_{abc}10+\log_{acd}10+\log_{abd}10+\log_{bcd}10 \leq \sum \log_a \sqrt[3]{10} .$$

244. Să se arate că, dacă $a, b, c \in [1, \infty)$, atunci:

$$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(3a+1)(3b+1)(3c+1)} \geq \frac{2}{8abc+(a+1)(b+1)(c+1)} .$$

245. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\sum \frac{\ln(ab)}{\ln(abe)} \leq \sum \frac{\ln a^2}{\ln(ae)} .$$

246. Să se arate că, dacă $a \geq b \geq c > 1$, atunci:

$$2\left(\ln^2\frac{a}{b}+\ln^2\frac{b}{c}\right) \geq \ln^2\frac{a}{c} \geq \ln^2\frac{a}{b}+\ln^2\frac{b}{c} .$$

247. Să se arate că, dacă $n \geq 2$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} k^n + \frac{n \cdot n!}{n-1} \geq \frac{n(n+1)}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^{n-1} .$$

248. Să se arate că, dacă $a, b, c, d > 0$; $a + b + c + d = 1$, atunci:

$$3(a^4+b^4+c^4+d^4) \geq a^3+b^3+c^3+d^3-4abcd .$$

249. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a + b + c = 0$, atunci:

$$a - b^2 + b - c^2 + c - a^2 \geq 9\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}\ .$$

250. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_{k!}\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

251. Să se arate că, dacă $a, b, m, n \in (0, \infty)$, atunci:

$$(m^2\sqrt{mnab} + a^2)(n^2\sqrt{mnab} + b^2) \geq (mb + na)^2\ .$$

252. Să se arate că, dacă $a, b, m, n \in (0, \infty)$, atunci:

$$(m^2 \cdot \sqrt[mn]{abmn} + a^2)(n^2 \cdot \sqrt[mn]{abmn} + b^2) \geq (mb + na)^2\ .$$

253. În ΔABC, $M, N, P \in [BC]$:

$$\sqrt[3]{AM \cdot AN \cdot AP}\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}\right) \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

254. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$r(r_a\sqrt{l_a m_a} + r_b\sqrt{l_b m_b} + r_c\sqrt{l_c m_c}) \leq pS\ .$$

255. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic ABC este valabilă relația:

$$\prod\frac{bc}{l_a(b+c)\cos\dfrac{A}{2}} \leq 1\ .$$

256. Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(k^2 + k + 1)k!\right)^{n+1} \geq \prod_{k=1}^{n+1}(n \cdot k! \cdot k^{k-1})\ .$$

257. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$\sum\sqrt{l_a s_a r_a} \leq p\sqrt{p\sqrt{3}}\ ,$$

unde s_a este lungimea simedianei corespunzătoare vârfului A.

258. Să se arate că în ΔABC cu $a^2+b^2\neq c^2$ avem:

$$\frac{1}{(a^2+b^2-c^2)^2}+\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2c^2}\geq\frac{81}{16(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}.$$

259. Să se arate că în ΔABC:

$$\sum\frac{a(b+c)}{bc\cos^2\frac{A}{2}}\geq 8.$$

260. Să se arate că, dacă $a>0$, atunci:

$$a^2-4a+5\geq[\log_{a^2+4a+2}a(a+2)^2(a+4)],$$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

261. Să se rezolve inecuația:

$$\sum_{k=3}^{x}C^2_{C_k^2}\leq 168.$$

262. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale:

$$\begin{cases} e^{x+y}+e^{y+z}+e^{z+x}=1 \\ e^{2x}+e^{2y}+e^{2z}=\dfrac{26}{27}+e^{2x+2y+2z} \end{cases}.$$

263. Să se arate că, dacă $f,g:[0,1]\to(0,\infty)$ sunt continue şi $f(x)+g(x)=3$; $(\forall)\ x\in$ $\in[0,1]$, atunci:

$$\int_0^1\frac{f^3(x)+g^3(x)}{f^2(x)+f(x)g(x)+g^2(x)}dx\geq 1.$$

264. Fie $f:A\to\mathbb{R}$; $A\subseteq\mathbb{R}_+$ şi $\lambda\in[0,1]$. Să se arate că, dacă:

a. f este funcție convexă şi descrescătoare, atunci:

$$f(2\sqrt{xy})\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y);$$

b. f este funcție concavă şi crescătoare, atunci:

$$f(2\sqrt{xy})\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

265. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{Rr}+\frac{1}{r^2}\right)(5r^2+m_a^2+m_b^2+m_c^2)>64.$$

266. Să se arate că în ΔABC:

$$8\sum(p-a)^3+2\geq 3\sqrt[3]{3abc}.$$

267. Fie $x, y \in [0, \infty)$. Să se arate că:

$$\sum\sqrt[2017]{x^{2017}+y^{2017}}\leq\sum\sqrt[2016]{x^{2016}+y^{2016}}.$$

268. Să se arate că în orice ΔABC este valabilă relația:

$$ab+2bc<a^2+c^2+2ab\cos C+2bc\cos A.$$

269. Să se arate că în ΔABC avem:

$$\sqrt[6]{abc}\sum\left(\sin\frac{A}{4}+\cos\frac{A}{4}\right)\leq 3\sqrt{p}.$$

270. Să se arate că în orice ΔABC este valabilă relația:

$$\sum\sqrt{\sin A\sin B}\leq\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}.$$

271. Să se arate că în orice ΔABC este valabilă relația:

$$\sum\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\leq\cos\frac{\pi-A}{4}+\cos\frac{\pi-B}{4}+\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

272. Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $1 < a < d < b < e < c < f$, atunci:

$$(abcf)^x+(cdef)^x+(af)^x+(cd)^x\geq(a^2f)^x+(bcf)^x+(cef)^x+(cd^2)^x.$$

273. Să se arate că, dacă $a, b, c > 0$, atunci:

$$\sqrt[3]{(a+1)(\sqrt[3]{b}+1)(\sqrt[9]{c}+1)}\geq 1+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[9]{b}\cdot\sqrt[27]{c}.$$

274. Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$x^6+x^4+11x^2+3\geq 2x^5+4x^3+10x.$$