DANIEL SITARU

MATEMATICĂ

PROBLEME DE CONCURS

CLASELE 11-12

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuprins

MOTTO:
Crede în tine!

Enunţuri

1. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}\right).$$

2. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|dx}\ .$$

3. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}.$$

4. Să se arate că în ΔABC ascuțitunghic este valabilă relația:

$$\cos A+\cos B+\cos C+\ln(A+1)(B+1)(C+1)\le\pi+3\ .$$

5. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$. Să se arate că dacă $x + y + z = 3\pi$, atunci:

$$x^x+y^y+z^z>81\,.$$

6. Să se demonstreze că: $\sqrt[2015]{2}+2\sqrt[2015]{6}<\sqrt[2015]{4}+2\sqrt[2015]{5}$.

7. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{7k^3+k^2+3k+1}{n^4+k+5}\,.$$

8. Să se arate că dacă $x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

$$\sum_{cyc}(\operatorname{tg}x+2\sin x)>3(x+y+z)\ .$$

9. Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC este valabilă relaţia:

$$\cos A + 4\cos B + 4\sin\frac{C}{2} \le 9\cos\left(\frac{\pi + B - C}{3}\right).$$

10. Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $x + y + z = 1$, atunci:

$$x^4 + y^4 + z^4 + \frac{1}{27} \ge \frac{1}{8}[(1-x)^4 + (1-y)^4 + (1-z)^4].$$

11. Să se demonstreze că dacă $x, y, z \in (-\infty, 0)$, atunci:

$$\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{\ln(1-y)} + \frac{1}{\ln(1-z)} < 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

12. Să se arate că $(\forall)\ x, y, z \in (0, 1)$,

$$e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x} < \frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)}.$$

13. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sum_{cyc} a^{\frac{1}{a}} < 3 + \frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

14. Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sum_{cyc}(x+y)^{\frac{1}{x+y}} < 1 + \frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

15. Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$; $x + y + z = 1$, atunci:

$$\sum_{cyc}\left(e^x - 2\sqrt{e^{1-x}}\right) + 3\sqrt[3]{e} \ge 0.$$

16. Să se demonstreze că:

$$\ln^2 3 + \ln^2 4 + \ln^2 5 + \frac{10}{3}\ln 3 \ln 5 \le \frac{1}{15}\ln(3^5 \cdot 5^3)\ln 3^3 \ln 4^4 \ln 5^5.$$

17. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sqrt[k]{4}}{\sqrt[k]{5} + \sqrt[k]{3}}.$$

18. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\sqrt[4]{4!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}{(n+1)!}.$$

19. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{1}{10} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

20. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sum_{j-1}^{k}\sqrt[3]{j}}\right).$$

21. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$; $\det(-2A+B)=0$; $\det(2A+B)=0$. Să se calculeze:

$4\det A + \det B$.

22. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{e}+\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi+\gamma+e-5}, \text{ unde } \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

23. Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$; $x + y + z = 1$, atunci:

$$\sum_{cyc} xy\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right) > \ln 2.$$

24. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(n - \sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{i+1}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{i}}\right).$$

25. Fie $L_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}-n\right)$; $k\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{L_k}{k}.$$

26. Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{k}\geq 1-\frac{\pi^2}{12}.$$

27. Să se arate că:

$$2(\operatorname{arctg}\pi-\operatorname{arctg}e)<\ln\pi-1.$$

28. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1+100n}^{200n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1+200n}^{400n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1+300n}^{400n}\frac{1}{k}\right).$$

29. Să se calculeze:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)^{x+a_i}}{\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{nx+\sum_{i=1}^{n}a_i}},$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$; $a_1, a_2, \ldots, a_n\in(0,\infty)$ fixate.

30. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+2)^2}\right).$$

31. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{i^2j^2}.$$

32. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$(a+e^{a^2})(b+e^{b^2})(c+e^{c^2})\geq e^{2p}.$$

33. Să se arate că dacă $a, b, c\in\mathbb{R}$, atunci:

$$\frac{ae^a+be^b+ce^c+6}{e^a+e^b+e^c}\geq 1+\ln 2.$$

34. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x+y)=6(x^2y+xy^2+xy)-5+f(x)+f(y);(\forall)x,y\in\mathbb{R}.$$

35. Să se arate că dacă $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 3$, atunci:

$$2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n\geq 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\ldots\cdot(n-1)^2 n.$$

36. Să se arate că dacă $a, b, c, d, e, f\in(0,\infty)$; $a+b+c=3$; $d+e+f=4$, atunci:

$$a\sqrt{\frac{d}{a}+1}+b\sqrt{\frac{e}{b}+1}+c\sqrt{\frac{f}{c}+1}\leq\sqrt{21}.$$

37. Să se arate că dacă $a, b, c, d, e, f\in(0,\infty)$ şi $a+b+c=2$; $d+e+f=2$, atunci:

$$\left(\frac{d}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{e}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{f}{c}\right)^c\leq\frac{9}{4}.$$

38. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}; f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$. Să se arate că:

$$f(3)+f(2,7)-2f(2,9)>f(2,5)-f(2,6).$$

39. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\left(\frac{i}{j+1}-\frac{j}{i+1}\right)^2.$$

40. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic de perimetru egal cu 1 avem:

$$\cos^3(aA+bB+cC)\geq 54Rr\cos A\cos B\cos C.$$

41. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2015}+1}+\frac{1}{n^{2015}+2}+\ldots+\frac{1}{n^{4030}}\right)\cdot\frac{1}{\ln n}.$$

42. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n+2}{k(n+1)}\right).$$

43. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

44. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^3}\right).$$

45. Să se rezolve în S_5 sistemul:

$$\begin{cases} x^3y^2z=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}x\\ x^2y^3z=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}y^2\\ xyz^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&4&1\end{pmatrix}x\end{cases}.$$

46. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{i=k+1}^{2k}\sqrt{i}}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{i}}\right).$$

47. Fie $A_i\in M_n(\mathbb{R}); A_i=A_i^T; A_i^2+A_j^2=A_iA_j-A_jA_i, i,j\in\overline{1,n}$.
Să se calculeze:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\det(A_i)+Tr(A_i)).$$

48. Să se arate că dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci:

$$\prod_{1\le i\le j\le n}(i^2+j^2+1)\ge n!\cdot\prod_{1\le i\le j\le n}(2+\sqrt{ij}).$$

49. Să se arate că dacă $x, y, z, t\in(0,\infty)$; $x^2+y^2+z^2+t^2=1$, atunci:

$$(x+z)(y+t)\le 1.$$

50. Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, atunci:
$$x + y(x + z) + z \leq 4.$$

51. Să se demonstreze că dacă $a, b \in (0, \infty)$, atunci:
$$a^2 + b^2 + 1 \geq a + ab + b.$$

52. Să se arate că dacă $a, b, c, x, y, z \in (1, \infty)$; $a \in [1, x]$, $b \in [1, y]$, $c \in [1, z]$, atunci:
$$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(x+a)(y+b)(z+c)} \geq \frac{2}{abc + xyz}.$$

53. Să se arate c[dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci
$$1 + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) \geq x_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + y_n.$$

54. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, atunci: $a + ac + b \leq 2$.

55. Să se demonstreze că şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(k!)^2}}$; $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent.

56. Să se demonstreze că şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}}$; $n \geq 1$ este convergent.

57. Să se calculeze:
$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}}.$$

58. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 1$, atunci:
$$\frac{a^3}{5b + 7c} + \frac{b^3}{5c + 7a} + \frac{c^3}{5a + 7b} \geq \frac{1}{36}.$$

59. Să se arate că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$; $a + b + c = 3$, atunci:
$$\frac{a^3}{\ln(bc)} + \frac{b^3}{\ln(ac)} + \frac{c^3}{\ln(ab)} \geq \frac{81}{2\ln(abc)}.$$

60. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 1$, atunci:

$$\frac{a^{10}+b^{10}}{a^7+b^7}+\frac{b^{10}+c^{10}}{b^7+c^7}+\frac{c^{10}+a^{10}}{c^7+a^7}>\frac{1}{3^8}.$$

61. Să se arate că:

$$\frac{2}{15\sin\frac{\pi}{15}}-\frac{1}{20\sin\frac{\pi}{20}}<\frac{3\sqrt{2}-4}{12}.$$

62. Fie $a, b, c \in [0, 3]$. Să se arate că:

$$a\sqrt[3]{3b^2-b^3}+b\sqrt[3]{3c^2-c^3}+c\sqrt[3]{3a^2-a^3}\le 9\sqrt[3]{4}.$$

63. Să se arate că:

$$(\sqrt{2})^{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\cdot(\sqrt{3})^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\cdot(\sqrt{5})^{\frac{1}{3\sqrt{5}}}<e.$$

64. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(2-a-b-c+abc)^2\le(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

65. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(3abc-a^3-b^3-c^3)^2\le(a^2+b^2+c^2)^3.$$

66. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, atunci:

$$(abc-ac-bc-ac)^2\le 4(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2).$$

67. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$; $a > 1$, atunci:

$$(n+a-1)(a-1)^{n-1}\le a^n.$$

68. Să se arate că în orice triunghi ABC este valabilă relația:

$$\sin A+4\sin B+4\cos\frac{C}{2}\le 9\sin\left(\frac{\pi+B-C}{3}\right).$$

69. Să se arate că dacă: $0 < a \le b \le c$, atunci:

$$(b-a)(c-a)(c-b)<bc^2.$$

70. Să se găsească $x \in M_2(\mathbb{R})$; $\det X = 0$;

$$X^3 - 5X^2 + 6X = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

71. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$; $A^2 - 5A = B^2 - 5B = -6I_2$. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} \det(A^n - B^n).$$

72. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$; $a \neq b \neq c \neq a$, atunci:

$$\frac{\sqrt[6]{a^2+b^2}}{\sqrt[3]{|a|}+\sqrt[3]{|b|}} + \frac{\sqrt[10]{b^2+c^2}}{\sqrt[5]{|b|}+\sqrt[5]{|c|}} + \frac{\sqrt[14]{c^2+a^2}}{\sqrt[7]{|c|}+\sqrt[7]{|a|}} \leq 3.$$

73. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt[3]{|z_1|}}{\sqrt[3]{|\Re z_1|}+\sqrt[3]{|\Im z_1|}} + \frac{\sqrt[5]{|z_2|}}{\sqrt[5]{|\Re z_2|}+\sqrt[5]{|\Im z_2|}} + \frac{\sqrt[7]{|z_3|}}{\sqrt[7]{|\Re z_3|}+\sqrt[7]{|\Im z_3|}} \leq 3.$$

74. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Notăm $\alpha = \det(A+B) - \det A - \det B$; $\beta = \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B - \operatorname{Tr}(AB)$. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0.$$

75. Să se arate că dacă $0 < a < b < c < d$, atunci:

$$(c-d)(e^a - e^b) \leq (a-b)(e^c - e^d).$$

76. Să se arate că dacă $0 < a < b < c < d$, atunci:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}} \leq \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1}{c-d}}.$$

77. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \dfrac{a}{\sin a} & \dfrac{b}{\sin b} & \dfrac{c}{\sin c} \end{pmatrix}$; $\dfrac{\pi}{6} < a < b < c < \dfrac{\pi}{2}$.

Să se demonstreze că $\det A \geq 0$.

78. Să se arate că dacă $1 < 2a < 2b < 2c$, atunci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

79. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_k^k}{a_k^{n+1-k}} \right),$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$.

80. Să se arate că dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$, atunci:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i^2} \geq \left(\frac{S}{n} \right)^{n\left(\frac{S}{n}\right)^n}.$$

81. Să se arate că dacă $1 < a < b < c$, atunci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 \ln a & b^2 \ln b & c^2 \ln c \end{vmatrix} \geq 0.$$

82. Fie $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$; $a, b, c \in (0,\infty)$. Să se arate că:

$$\frac{\Delta'(a+b+c)}{\Delta(a+b+c)} \leq \frac{1}{6\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

83. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Notăm $\Delta_{2n+1} = \det A$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\frac{\Delta_{2n+7}}{\Delta_{2n+5}} \geq \frac{\Delta_{2n+3}}{\Delta_{2n+1}}.$$

84. Fie $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos A & \cos B \\ 1 & \cos A & 1 & \cos C \\ 1 & \cos B & \cos C & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$, A, B, C unghiurile ΔABC.

Să se arate că:

$$\sqrt{-\frac{1}{8}\det A} \geq \frac{S}{(R+p)^2}.$$

85. Să se arate că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$4 + 2\ln(abc) < a + b + c + abc.$$

86. Să se arate că dacă $a > b > c > 0$, atunci:

$$5(a^4 + b^4) > \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} > 5(b^4 + c^4).$$

87. Să se arate că dacă $0 < a \leq b \leq c$, atunci:

$$(b-a)(c-a)(c-b) < bc^2.$$

88. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, atunci

$$(abc - ac - bc - ac)^2 \leq 4(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2).$$

89. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(3abc - a^3 - b^3 - c^3)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

90. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(2 - a - b - c + abc)^2 \leq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

91. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci:

$$(\sin 2a - \sin 2b)^2 \leq 4(\sin^2 a + \cos^2 b)(\sin^2 b + \cos^2 a).$$

92. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} \ln\frac{2}{15} & \ln 4 & \ln 4 \\ \ln 9 & \ln\frac{3}{10} & \ln 9 \\ \ln 25 & \ln 25 & \ln\frac{5}{6} \end{vmatrix} > \ln 8 \ln 27 \ln 125 .$$

93. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{2^n}} C_{2^{n+1}}^{2^n} .$$

94. Să se arate că dacă a, b, $c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 10$, atunci:

$$\sum \frac{2+5a}{1+3a} \le 16 .$$

95. Să se arate că dacă a, b, $c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 3$, atunci:

$$\sum \frac{e^a}{e^a+1} \le \frac{9}{2} .$$

96. Să se arate că dacă a, $b \in (1, \infty)$, atunci:

$$(e^2 \ln b - e^b \ln a)^2 \le (e^{2a} + e^{2b})(\ln^2 a + \ln^2 b) .$$

97. Să se arate că dacă a, b, $c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \ge \frac{2a}{(a^2+1)^2}(b+c-2a) + \frac{2}{a^2+1} .$$

98. Să se arate că dacă $x, y > 0, x \ne y$ şi $0 < a < b < \frac{1}{2} < c < d < 1$, atunci:

$$x\left[\left(\frac{y}{x}\right)^a + \left(\frac{y}{x}\right)^d - \left(\frac{y}{x}\right)^b - \left(\frac{y}{x}\right)^c\right] > y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^b + \left(\frac{x}{y}\right)^c - \left(\frac{x}{y}\right)^a - \left(\frac{x}{y}\right)^d\right].$$

99. Să se arate că dacă a, b, $c \in (0, \infty)$, $a + b + c = 3$, atunci:

$$ab + bc + ca + 3 \le e^a + e^b + e^c + \ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) .$$

100. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, $a < b < c < d$, atunci:

$$\frac{\begin{vmatrix} a^2 \ln a & b^2 \ln b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \le \frac{\begin{vmatrix} c^2 \ln c & d^2 \ln d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

101. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic ABC este valabilă relația:

$$2\sum \sin A > 3\pi - \prod \operatorname{tg} A.$$

102. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi $a + b + c = 2$, atunci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^b \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^c \ge \frac{4}{(b+c+d)^2}.$$

103. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$, atunci:

$$\frac{b}{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} + \frac{d}{\operatorname{arctg}\frac{d}{c}} \ge \frac{b+d}{\operatorname{arctg}\left(\frac{b+d}{a+c}\right)}.$$

104. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 3$, atunci:

$$ae^{a^2} + be^{b^2} + ce^{c^2} \ge 3e.$$

105. Să se arate că dacă $a, b, c \in (2, \infty)$, atunci:

$$3\sqrt[3]{\frac{e^{a+b+c}}{abc}} < \frac{e^{a+1}}{a+1} + \frac{e^{b+1}}{b+1} + \frac{e^{c-2}}{c-2}.$$

106. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$a^2 + b^2 + c^2 > \sqrt[3]{abc}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} c).$$

107. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$; $a + b + c = 12$, atunci:

$$\sum \frac{a^2}{a+1} + 4\sum \frac{1}{a+1} \ge 5\sum \frac{a}{a+1}.$$

108. Să se arate că dacă $a \le b \le 2 \le c$, atunci:

$$bc + 3a \ge 1 + b + 2a\sqrt{bc}\ .$$

109. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$; $x \ne y \ne z \ne x$, atunci:

$$\sqrt{\frac{x^3 - y^3}{x - y}} + \sqrt[3]{\frac{y^4 - z^4}{y - z}} + \sqrt[4]{\frac{z^5 - x^5}{z - x}} > 3\min(x, y, z)\ .$$

110. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \ne b \ne c \ne a$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 + c^2 & c^2 + a^2 & a^2 + b^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$.

Să se rezolve ecuația:

$$X^2 + \Delta_1 \Delta_2 = 0\ .$$

111. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} \right).$$

112. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$; $x \ne y \ne z \ne x$. Să se arate că:

$$\frac{\Delta_1}{(y - x)(z - x)(z - y)} < \left(xyz + \frac{1}{2} \right)^2, \text{ unde } \Delta_1 = \begin{vmatrix} x + y^2 & y + z^2 & z + x^2 \\ x^2 + y^3 & y^2 + z^3 & z^2 + x^3 \\ x^3 + y^4 & y^3 + z^4 & z^3 + x^4 \end{vmatrix}.$$

113. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci:

$$-16abcd \le (a + c)^2((d - b)^2 + (a - c)^2) \le 16abcd\ .$$

114. Să se arate că dacă $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$, atunci:

$$\begin{vmatrix} a & \sqrt{ad} & \sqrt{ae} \\ \sqrt{ad} & b + d & \sqrt{de} + \sqrt{bf} \\ \sqrt{ae} & \sqrt{de} + \sqrt{bf} & c + e + f \end{vmatrix} \ge 0\ .$$

115. Să se arate că dacă $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ad & ae \\ ad & b^2+d^2 & de+bf \\ ae & de+bf & c^2+e^2+f^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

116. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$; $a < b < c < d$, atunci:

$$(c-d)\left(\frac{1}{1+e^a}-\frac{1}{1+e^b}\right) \leq (a-b)\left(\frac{1}{1+e^c}-\frac{1}{1+e^d}\right).$$

117. Să se arate că dacă $a, b \in (0, \infty)$; $x, y \in [0, 1]$, atunci:

$$\left(\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)^2+1\right)^{4ab} \leq \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+1\right)^{2ab} \cdot (x^2+1)^{a^2} \cdot (y^2+1)^{b^2}.$$

118. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ Să se arate că:

$$\left(1+\frac{a}{c}\right)^c \left(1+\frac{b}{d}\right)^d \leq \left(1+\frac{a+b}{c+d}\right)^{c+d}.$$

119. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} \operatorname{arctg} \frac{1}{(k-i)^2+(k-i)+1} \right).$$

120. Să se arate că dacă $A, B, C, D \in M_0(\mathbb{R})$; $A^2 + BA = AB - B^2$; $C^2 + DC = CD - D^2$, atunci:

$$\det((A^2+B^2)(C^2+D^2) - 2(A^2+B^2+C^2+D^2) + 4I_2) \geq 16.$$

121. Fie $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} a^2+2x^2 & x^2+bx+ay & ay+xy+xc \\ x^2+bx+ay & b^2+x^2+y^2 & y^2+by+xc \\ ay+xy+xc & y^2+by+xc & c^2+2y^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

122. Să se arate că dacă a, b, $c \in (0, \infty)$, atunci:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} \geq \frac{12abc}{1+a+b+c}.$$

123. Fie a, b, $c \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\sum \frac{3a^2+12a+11}{a^3+6a^2+11a+6} \geq 3\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right).$$

124. Să se arate că dacă x, y, z, a, b, $c \in (0, \infty)$ şi $xyz = 1$, atunci:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} \leq \frac{1}{512} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

125. Să se arate că dacă a, b, $c \in \mathbb{Q}$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} \frac{ak^2+bk+c}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} \frac{bk^2+ck+a}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} \frac{ck^2+ak+b}{k!},$$

atunci $a = b = c$.

126. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$; $x+y-5z=0$ şi $x^2+z^2=1$, atunci:

$$|2x+3y-5z| \leq \sqrt{101}.$$

127. Să se arate că dacă x, y, $z \in \mathbb{R}$; $x-2y-3z=0$ şi $x^2+2z^2=1$, atunci:

$$|2x+y-z| \leq \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$

128. Fie a, b, $c \in (0, \infty)$; $a \neq b \neq c \neq a$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

Să se arate că:

$$\frac{\Delta_1-\Delta_2}{(b-a)(a-c)(b-c)} \geq 12\sqrt[6]{(abc)^5}$$

129. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sqrt{a^2-ac+c^2}+\sqrt{b^2-bd+d^2} \geq \sqrt{(a+b)^2-(a+b)(c+d)+(c+d)^2}\ .$$

130. Să se arate că dacă $x, y, z, u, v, w \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{x^2}{u}e^{\frac{u}{x}}+\frac{y^2}{v}e^{\frac{v}{y}}+\frac{z^2}{w}e^{\frac{w}{z}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{u+v+w}e^{\frac{u+v+w}{x+y+z}}\ .$$

131. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația:

$$x^3-3ax^2+3(a^2-b^2)x-a^3+3ab^2-2b^3=0\ .$$

132. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Notăm:

$$A=-3a;\ B=3a^2-b^2-c^2-bc;\ \ C=a^3-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-abc.$$

Să se rezolve ecuația:

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0\,.$$

133. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1]$, atunci:

$$e^{\frac{4}{e}}(b\cdot a^{2\sqrt{a}}+c\cdot b^{2\sqrt{b}}+a\cdot c^{2\sqrt{c}}) \geq 3\sqrt[3]{abc}\ .$$

134. Să se arate că dacă $n \in \{1, 2\}$, atunci în triunghiul ABC este adevărată relația:

$$3^{2-n}\left(\frac{a^{2n+1}}{m_a}+\frac{b^{2n+1}}{m_b}+\frac{c^{2n+1}}{m_c}\right) \geq 2\sqrt{3}(abc)^{\frac{2n}{3}}\ .$$

135. Să se arate că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\sqrt[4]{\sum\frac{a}{(a-1)^2}} \geq \sqrt{6}(10-a-b-c)\,.$$

136. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 2)$, atunci:

$$b\cdot e^{\frac{1}{a-2}}+c\cdot e^{\frac{1}{b-2}}+a\cdot e^{\frac{1}{c-2}} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{1}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

137. Să se arate că dacă $x, y \in [e^2, e^4]; x \neq y$, atunci:

$$\frac{3xy}{e^8} \leq \left|\frac{y\ln x - x\ln y}{x-y}\right| \leq \frac{xy}{e^4}.$$

138. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot k!}\right)^{\frac{1}{k}} \leq e(e-1).$$

139. Fie a, $b \in \mathbb{C}$. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - b^2)x - a^3 + 3ab^2 - 2b^3 = 0.$$

140. Fie a, $b \in \mathbb{C}$. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca-1)x + b - abc = 0.$$

141. Fie $a > 1$. Să se arate că:

$$(a^2e)^a < \frac{(a+1)^{(a+1)^2}}{a^{a^2}} < ((a+1)^2e)^{a+1}.$$

142. Fie $ABCD$ un tetraedru în care:

$$AC = \sqrt{11};\ CD = 3;\ AD = \sqrt{14};\ AB = \sqrt{3};\ BC = 2;\ BD = \sqrt{13}.$$

Să se arate că:

$$\mathrm{m}(\sphericalangle(AB,\ CD)) > 90^\circ.$$

143. Să se arate că dacă A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = C$ şi $\det(C^2 + C + I_n) \neq 0$, atunci $BABA + BA + I_n$ este inversabilă.

144. Să se arate că dacă A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = C$ şi $\det(C^3 + C^2 + C + I_n) \neq 0$, atunci $BABABA + BABA + BA + I_n$ este inversabilă.

145. Să se arate că dacă A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât:

$$AB = C \text{ şi } \det(C^m + C^{m-1} + \ldots + C^2 + C + I_n) \neq 0,\ m \in \mathbb{N};\ m \geq 3,$$

atunci $(BA)^m + (BA)^{m-1} + (BA)^{m-2} + \ldots + BA + I_n$ este inversabilă.

146. Fie a, $b \in (1, \infty)$ fixate. Să se studieze convergența șirului:

$$x_n = \sqrt[n]{(\log_2 a)^n + (\log_2 b)^n}\ .$$

147. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\,\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{1+x^2}}{x^2}\right)$.

148. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 5 & i \\ i & \varepsilon^2 & 7 \end{pmatrix}$; $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se arate că există B, $C \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât: $A = B^{2015} + C^{2016}$.

149. Să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 2$,

$$n^{\ln 2} \leq \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[n+1]{n}\cdot\sqrt[n+2]{n}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{n}\ .$$

150. Să se arate că dacă $a \geq b \geq c \leq d \geq e > 0$, $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$\frac{a^n}{b^n+c^n}+\frac{b^n}{c^n+d^n}+\frac{c^n}{d^n+e^n} \leq \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}+e^{n+1}}+\frac{b^{n+1}}{c^{n+1}+d^{n+1}}+\frac{c^{n+1}}{d^{n+1}+e^{n+1}}\ .$$

151. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$\frac{(\operatorname{tg}5^\circ)^n}{(\operatorname{tg}4^\circ)^n+(\operatorname{tg}3^\circ)^n}+\frac{(\operatorname{tg}4^\circ)^n}{(\operatorname{tg}3^\circ)^n+(\operatorname{tg}2^\circ)^n}+\frac{(\operatorname{tg}3^\circ)^n}{(\operatorname{tg}2^\circ)^n+(\operatorname{tg}1^\circ)^n} \geq \frac{3}{2}\ .$$

152. Să se arate că dacă a, b, $c > 0$; $a \cdot b \cdot c = 27$, atunci:

$$\ln(\ln(1+a)) + \ln(\ln(1+b)) + \ln(\ln(1+c)) \leq 3\ln(\ln 4)\ .$$

153. Fie $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(1+i+i^2)x^i$; $x \in (0,1)$. Să se arate că dacă a, b, $c \in (0, 1)$, atunci:

$$L(a)+L(b)+L(c) \geq \frac{6\sqrt[3]{abc}}{(1-a)(1-b)(1-c)}\ .$$

154. Fie a, b, c, $d \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$(ab+cd)^2 \leq (b\sqrt[5]{ab^4}+d\sqrt[5]{cd^4})(a\sqrt[5]{a^4b}+c\sqrt[5]{c^4d})\ .$$

155. Să se arate că dacă a, $b \in [0, 2]$, atunci:

$$\frac{a^2}{b+2}+\frac{b^3}{a+2}+(2-a)b^2 \le 12 .$$

156. Să se arate că dacă a, $b \in [0, 2]$, atunci:

$$\frac{a^2}{b+2}+\frac{b^3}{a+2}+(2-a)b^2 \le 12 .$$

157. Fie $x, y, z \in [0, 1]$. Să se arate că:

$$\frac{x}{y+z+2016}+\frac{y^2}{x+z+2016}+\frac{z^3}{x+y+2016}+(1-x)(1-y)(1-z)\le 1 .$$

158. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$(a\sqrt[3]{a^2b}+c\sqrt[3]{c^2d})(b\sqrt[3]{ab^2}+d\sqrt[3]{cd^2})\le (a^2+c^2)(b^2+d^2) .$$

159. Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, 1]$, atunci:

$$0{,}999<\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}<3{,}001 .$$

160. Fie $a, b \in \mathbb{N}$; $a \ge 2$; $b \ge 2$; $a < b$. Notăm $L(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+k)(b+k)}$.

Să se demonstreze că:

$$L(a, b)\ge \left(\frac{a!}{b!}\right)^{\frac{1}{b-a}} .$$

161. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)\cdot\ldots\cdot(1+nx^2)}}{n^2x^2}\right).$$

162. Să se calculeze:

$$\int\frac{(6x+5)e^x}{6\sqrt[6]{x}}dx;\ x\in(0,\infty) .$$

163. Să se calculeze:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4026}} \frac{\sin(2013x)}{\sin(2013x) + \cos(2013x)} dx .$$

164. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$; $m < n$ şi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Să se arate că:

$$\left(\int_0^1 x^n f(x) dx\right)^2 \le \frac{1}{2(n-m)+1} \int_0^1 x^{2m} f^2(x) dx .$$

165. Să se arate că:

$$e^5 \int_1^2 e^{-x^2} dx + \int_1^2 e^{x^2} dx \le e^4 + e .$$

166. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a < b$; $0 < c < d$ şi $f : [a, b] \to [c, d]$ o funcţie continuă pe $[a, b]$. Să se arate că:

$$\int_a^b f(x) dx + cd \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \le (c+d)(b-a) .$$

167. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[2013]{(x-1)^{2012}(x+1)^{2014}}} dx;\ x \in (1, \infty).$$

168. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $f_n : (0, \infty) \to R; f_n(x) = \int_0^x t^n g(t)$. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(1) .$$

169. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $\int_a^{a+1} [x] dx = \int_b^{b+1} [x] dx$, atunci $a = b$. (Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.)

170. Fie $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ şi $Q(x) = x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, respectiv x_1', x_2', x_3', x_4'. Să se arate că:

$$P(x_1')P(x_2')P(x_3')P(x_4') = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4) .$$

171. Să se demonstreze că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \operatorname{tg} x \le \frac{3\ln 2}{2} - \frac{3\pi^2}{32}.$$

172. Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(\sin x)dx \ge \frac{11}{9}.$$

173. Să se arate că:

$$\ln 3 \le 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \le \ln 9.$$

174. Fie $f, g, h, t \in \mathbb{C}[x]$ polinoame nenule cu proprietatea că:

$$f(x^4) + xg(x^4) + x^2h(x^4) + x^3t(x^4) \text{ este divizibil cu } x^4 - 1.$$

Să se arate că: $f(1) + t(1) = g(1) + h(1)$.

175. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$.
Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n;\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + (S_1 + 4)x^3 + (S_2 + 12)x^2 + (S_3 + 6)x + S_4 + 2 = 0.$$

176. Fie $P(x) = (2013x + 2014)^{2015}$. Să se găsească $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}[x]$ încât:

$$P(x) = P_1^3(x) + P_2^3(x) + P_3^3(x).$$

177. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{Z});\ \det B \ne 0;\ B^* = B$. Să se arate că $\det\left(A + \frac{2}{3}B\right) \ne 0$.

178. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ astfel încât $x^5 = e$ şi $y^5 = xyx^{-1}$. Să se arate că:

$$y^{25n} = (x^{-1})^3 y^n x^3;\ n \in \mathbb{N}^*.$$

179. Să se calculeze:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2014\sin^2 x + \cos x}{\sin x + \cos x + 2014} dx.$$

180. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f, g continue pe $\mathbb{R}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$. Ştiind că $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = g(a - x)$ şi $f^2(x) + g^2(x) = b$, să se calculeze:

$$I = \int_0^a \frac{bf^2(x) + g(x)}{f(x) + g(x) + b^2}\,dx .$$

181. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt}{x} .$$

182. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{ax+b}\,dx;\ ax + b \neq 0;\ \forall\, x \in [0, 1];\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sin n \cdot I_n) .$$

183. Să se arate că:

$$I = \int_1^3 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\operatorname{arctg}\dfrac{2}{(x-2)^2}}\,dx = 1 .$$

184. Fie $G = (-1,\ 1)$. Definim pe G legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Să se calculeze:

$$S = \frac{1}{2\cdot 2^2 - 1} * \frac{1}{2\cdot 3^2 - 1} * \ldots * \frac{1}{2\cdot 2014^2 - 1} .$$

185. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$.
Să se calculeze:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,dx .$$

186. Fie $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{R}^* \right\}$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian şi $(G, \cdot) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

187. Fie $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian şi $(G, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.

188. Fie $a \in \mathbb{C}^*$. Definim pe $M_n(\mathbb{C})$ legile de compoziție:

$$X * Y = X + Y - aI_n \quad \text{şi} \quad X \circ Y = XY - aX - aY + (a^2 + a)I_n.$$

Să se arate că $(M_n(\mathbb{C}), *, \circ)$ este un inel necomutativ cu divizori ai lui zero.
Se cer elementele inversabile ale inelului.

189. Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$. Definim pe $M_n(\mathbb{C})$ legile de compoziție:

$$X * Y = X + Y - aI_n;\ X \circ Y = XY - aX - aY + (a^2 + a)I_n;$$
$$X \perp Y = X + Y - bI_n; X \top Y = XY - bX - bY + (b^2 + b)I_n.$$

Să se arate că $(M_n(\mathbb{C}), *, \circ)$ şi $(M_n(\mathbb{C}), \perp, \top)$ sunt inele necomutative cu divizori ai lui zero izomorfe.

190. Pe $G = [0, 1)$ definim legile de compoziție:

$$x * y = \{x + y\};\ x \circ y = x * y * 0{,}4;\ x \perp y = x * y * 0{,}7.$$

Să se arate că $(G, \circ)$ şi $(G, \perp)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

191. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \sum \frac{a^2}{b} \operatorname{arctg} \frac{1}{b} \geq (a + b + c)^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}}\ .$$

192. Fie H un subgrup cu şase elemente al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Arătați că:

$$H = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

193. Fie f un polinom cu coeficienți întregi care admite rădăcina $x_1 = \dfrac{2015}{2013}$. Să se arate că $f(1)$ este număr par.

194. Definim pe $\mathbb{R}$ legile de compoziție:

$$x * y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{2014})^3;\ x \circ y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{2015})^3 .$$

Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ şi $(\mathbb{R}, \circ)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

195. Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R};\ f(x) + 2f\left(\frac{5}{x}\right) = x^2$. Să se calculeze:

$$\int_1^2 f(x)dx .$$

196. Fie $P(x) = (x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2014)$. Să se calculeze:

$$I_1 = \int_{2015}^{2016} \frac{P'(x)}{P(x)}dx;\ I_2 = \int_{2015}^{2016} \frac{P''(x)P(x) - [P'(x)]^2}{P^2(x)}dx .$$

197. Să se demonstreze că:

$$\left(\int_0^1 2015^{x^2} dx\right)\cdot\left(\int_0^1 2015^{-x^2} dx\right) \geq 1 .$$

198. Fie polinoamele $P_1(x) = 1;\ P_{n+1}(x) = \int_a^x P_n(y)dy;\ a \in \mathbb{R};\ n \geq 1$. Să se arate că polinomul $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_{k+1}(x)$ nu poate avea rădăcini multiple.

199. Fie $G = (0,\infty)/\{1\}$. Definim pe G legile de compoziție:

$$x * y = x^{2014 \ln y};\ x \circ y = x^{2015 \ln y} .$$

Să se arate că $(G, *)$ şi $(G, \circ)$ sunt izomorfe şi să se determine un izomorfism

$$f: (G, *) \to (G, \circ).$$

200. Fie $p \in \mathbb{Z}$. Notăm $p\mathbb{Z} = \{pq \mid q \in \mathbb{R}\}$. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $n \geq 2$ numere prime distincte. Să se arate că:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(p_i\mathbb{Z}) = (\prod_{i=1}^{n} p_i)\mathbb{Z} .$$

201. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim pe G legea de compoziție $x * y = 2014^{\log_{2014}x \cdot \log_{2014}y}$. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

202. Fie $G = (2014, \infty) \setminus \{2015\}$. Definim pe G legea de compoziție:

$$x * y = 2014 + (x - 2014)^{\log_3(y-2014)}.$$

Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

203. Să se calculeze:

$$I = \int x^9 \sqrt{1 + x^5}\, dx.$$

204. Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcție Rolle cu proprietatea că:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Să se arate că $\exists\, b \in (-a, a); f'(b) = 0$.

205. Fie $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 0 & 6x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 3x+1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} / \left\{ -\frac{1}{5} \right\} \right\}$.

Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian şi $(\mathbb{R}^*, \cdot) \simeq (G, \cdot)$.

206. Fie $G = \mathbb{R} / \left\{ -\frac{1}{2015} \right\}$; $x * y = x + y + 2015xy$. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian şi $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (G, *)$.

207. Fie $a = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3 - 12\sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{25}}$ şi $b = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{1 - 12\sqrt[3]{7} + 6\sqrt[3]{49}}$.
Să se calculeze:

$$I = \int \frac{a^{3x} - b^x}{(1 + a^x)^3}\, dx.$$

208. Fie $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $f : [a, b] \to (0, \infty)$; f continuă şi $\int_a^b f(x)dx \le M$; $M \in (0, \infty)$; $g : [a, b] \to \mathbb{R}$; g descrescătoare pe $[a, b]$. Să se arate că:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le M(g(a) + g(b)).$$

209. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{1}{\cos(x + 2016)\cos(x + 2015)} dx;\ x \in I; I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos(x + 2016)\cos(x + 2015) \ne 0\}.$$

210. Pe mulțimea $G = (-1,\ 1)$ definim legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Să se rezolve ecuația:

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 2015 ori}} = 0\ .$$

211. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \underbrace{\min}_{k\in\mathbb{Z}} x - k$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx\ .$$

212. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ o funcție astfel încât:

$$f^{2n+1}(x) + (2n+1)^{f(x)} = x; (\forall) x\in\mathbb{R}\ .$$

Să se arate că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

213. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{\cos(2016x)}{\sin x} dx;\ x\in I; I\subseteq \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

214. În grupul $(G, \cdot)$ avem relațiile: $(xy)^3 = (yx)^3$ şi $(xy)^5 = (yx)^5$; $(\forall)\ x, y \in G$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

215. Fie $G = \{1, i, -1, -i\}; i^2 = -1$. Să se arate că grupul $(G, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul lui Klein $(K, \circ)$.

216. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.
Să se calculeze:

$$\underbrace{\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) * \left(\frac{e^2-1}{2e}\right) * \ldots * \left(\frac{e^2-1}{2e}\right)}_{\text{de } n \text{ ori}};\ n\in\mathbb{N};\ n\geq 2.$$

217. Fie $G = \left\{ z \mid \frac{z^2+2015z+1}{z^2+2016z+1} \in \mathbb{R};\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \right\} \cup \{1\}$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

218. Fie $G=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(2x+f(y))=x+y+f(f(x)); x,y\in\mathbb{R}\}$. Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.

219. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x)=\sqrt{\{x\}-\{x\}^3}$ şi $G=\{nT \mid T>0;\ f(x+T)=f(x);\ n\in\mathbb{Z}\}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi $(G,+)$ este grup abelian.

220. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_3^n [\log_{[x]}x]dx}{e^n},$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

221. Să se demonstreze că:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{ctg}(e^x)dx<\frac{1}{6}.$$

222. Să se calculeze:

$$I=\int_0^1\frac{x^3}{(x+1)^3+6e^x+3x+5}dx.$$

223. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă în $x=1$, integrabilă pe $[1, 3]$ şi $f(x^3)\le x f(x)$, $(\forall)\ x>0$. Să se arate că dacă $f(1)=3$, atunci:

$$\int_1^3 f(x)dx\le 2(3\sqrt{3}-1).$$

224. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi j}{n}\right).$$

225. Să se afle $a\in\mathbb{R}$ încât $[a,2a]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{36}{\pi^2}\left(\int_a^{2a}\frac{\sin x}{x}dx\right)\left(\int_a^{2a}\frac{x}{\sin x}dx\right)<\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

226. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi $0<p<q<\frac{\pi}{2}$ astfel încât:

$$\int_{p\sin t}^{p\cos t} f(x)dx \le \int_{\frac{p}{\sqrt{2}}}^{\frac{q}{\sqrt{2}}} f(x)dx;\ (\forall)\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Să se arate că:

$$qf\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)+pf\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)=0\ .$$

227. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,\infty)$, atunci:

$$ab+bc+ca\le \ln(a^a\cdot b^b\cdot c^c)+\frac{e^a+e^b+e^c}{e}\ .$$

Generalizare: Să se arate că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,\infty)$, atunci:

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\le \ln(x_1^{x_1}\cdot x_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n})+\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{e}\ .$$

228. Fie $P(x)=5x^{2015}+x^2+x+1\in\mathbb{C}[x]$ un polinom având rădăcinile:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2015}\in\mathbb{C}.$$

Să se calculeze:

$$\prod_{i=1}^{2015}(1+x_i)\cdot\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{x-x_i}\ .$$

229. Să se demonstreze că:

$$\frac{2}{2015}\int_0^1 \sin x dx-\int_0^1 \sin^2(x^{2015})dx\le\frac{1}{4029}\ .$$

230. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin x dx\right)^2-\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\sin\frac{i}{n}\sin\frac{j}{n}\right].$$

231. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{arctg}\left(\frac{i}{n}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{j}{n}\right).$$

232. Să se calculeze:

$$L=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_x^{3x}\frac{\operatorname{tg} t}{t}dt}.$$

233. Să se arate că:

$$\int_3^{n+1}\ln x dx\ge \sum_{k=3}^{n}\sqrt{\ln k\ln(k+1)};\ n\in\mathbb{N};\ n\ge 3.$$

234. Să se arate că:

$$\frac{\pi}{8}\le\int_0^1\operatorname{arctg} x dx\le\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

235. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty);\ f(0)=0$ o funcție continuă, strict crescătoare. Dacă $a\in[0,\infty);\ b\in\operatorname{Im} f;\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, atunci:

$$a^2b^2\le\frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2+\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^b f^{-1}(y)dy\right)^2.$$

Aplicație: $$\frac{1}{1-e^2}\left(\int_0^1 e^{x^3}dx\right)^2+\frac{1}{e^2}\left(\int_0^1\sqrt[3]{\ln y}dy\right)^2\ge 1.$$

236. Să se calculeze:

$$\int\frac{4x^5-5}{x^{10}+10x^5+4x^2+25}dx;\ x\in(0,\infty).$$

237. Să se calculeze:

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2^x\operatorname{tg}^2 x}{1+2^x}+\frac{3^x\operatorname{tg}^4 x}{1+3^x}\right)dx.$$

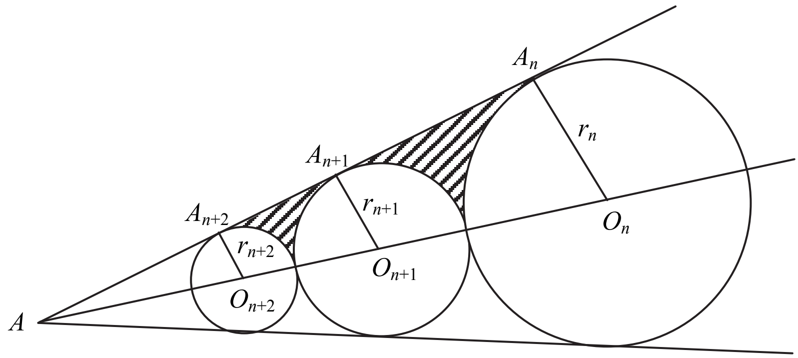
238. Să se arate că:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+x^2}\sin x dx>\frac{5\pi^2}{288}.$$

239. Să se arate că dacă $[a,b]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

$$\int_a^b\sin x dx>\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}.$$

240. Fie $0 < \alpha \le \frac{\pi}{4}$; $r_1 = 1$.



Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S[A_k B_k A_{k+1}] .$$

241. Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\sin x)dx \le \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} .$$

242. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x t^{t-1}(t + t\ln t + 1)dt}{x^x} .$$

243. Să se calculeze:

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} + \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}} dx .$$

244. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin x dx\right)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n} \sin\left(\frac{i}{n}\right)\sin\left(\frac{i}{n}\right)\right].$$

245. Să se arate că:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,|\sin x| - x < \frac{1}{27} .$$